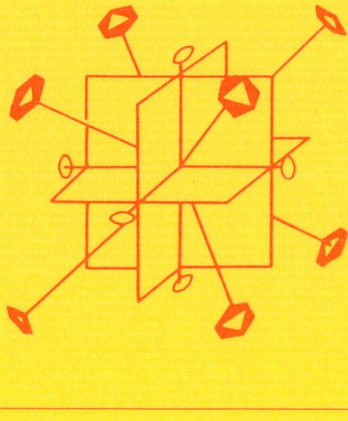
Basic Notions of Algebra

代数学とは何か

I.R. シャファレヴィッチ 著

蟹江幸博 訳



丸善出版

代数学とは何か

著…シャファレヴィッチ
訳…蟹江幸博

丸善出版

Translation from the English language edition:
Basic Notions of Algebra by I.R. Shafarevich

まえがき

本書の目的は，代数を，その基本概念と主な分野について，一般的に概観することである．しかし，それをするために，どんな言葉で表わせばよいのだろう？　「数学は何を研究するのか？」という質問に,「何かしらの関係」または「構造」が「与えられた集合」と答えたとしても，受け入れてもらえるとは思えない．つまり，何らかの関係または構造が与えられた，考え得る集合の連続体の中で，数学者を本当に惹きつけるのは，非常に小さくばらばらに存在する部分集合だけであって，質問が意味するのは，非結晶質の大きな塊の中に点在するこの消えてしまうほど小さな部分の特別な価値が何なのかを理解することだと言えるだろう．同じように，数学概念の意味は，定義の形式性に込められているというものではない．数学者にとって，基本的な実例（普通あまり沢山あるわけではないが）とは，概念の動機付けや実質的な定義であり，と同時に概念の「意味」そのものである．それらがもたらすものは少なくない（むしろ多いと言える）．

どんな現象であろうと，何ほどかの個別性を持っているなら，それを一般的な性質で特徴付けようとすれば，おそらくは同じような困難が起こるだろう．たとえば，ドイツ人とかフランス人の「定義」を与えるなど無意味なことで，できることは，彼らの歴史とか生活のスタイルとかを述べることだけである．同じように，ある１人の人間を「定義」することも不可能であって，できることはその人の「パスポートのデータ」を与えるとか，外観や性格，または伝記的な事項のうちの代表的なものをいくつか物語ることぐらいしかない．本書の中で代数に対して行おうとしていることはこういうことである．それゆえ，本書では，公理論的で論理的な記述が描写的なスタイルと隣り合うことになり，鍵になる例や，数学の他の分野や自然科学と代数学との間の接点を綿密に述べている．ここでの素材の選択は，もちろん著者の個人的な意見や好みに強い影響を受けている．

読者として著者が想定しているのは，大学初年級の数学科の学生や，代数学の精神や数学における代数の位置に対する感じをつかみたいと思っている理論物理学者や代数学を専門にしていない数学者である．代数学の概念や結果を系統的に扱っている箇所でも，本書で読者に要求している予備知識は非常に制限されたものである．仮定している読者の知識は，多くの大学で教えられている程度の微積分学，解析幾何学，線形代数学だけである．例を述べるときに使われている知識の範囲を書き上げることは難しい．射影空間，位相空間，微分可能多様体と複素解析的多様体，複素関数の基礎理論を知っていることは望ましいことではあるが，個々の例を取り扱う際に起こり得る困難は本質的にその例だけのものであって，残りの部分の理解には影響しないということを覚えておいて欲しい．

本書では，代数学を教えようという振りをするつもりもない．これは単に代数学について語ろうという試みである．多少は埋め合わせになるように，詳しい文献表を作る努力をした．文献表の前のコメントで，本書で述べたことに関する問題の研究ができる書物とか，紙数がなくて扱えなかった代数学の他の諸分野に関する参考文献を，読者自身で探し出せるようにしたつもりである[1]．

本書の準備版は，F.A. ボゴモロフ，E.B. ヴィンバーグ，A.M. ヴォルコンスキー，R.V. ガムクレリジェ，S.P. ジョムシキン，D. ザギエ，A.I. コストリキン，Yu.I. マニン，V.V. ニクリン，A.N. パルシン，M.K. ポリヴァノフ，V.L. ポポフ，A.V. ロイテル，M. リード，A.N. チューリンが読んでくれた．彼らの意見や提案には感謝しており，それらは本書の中に反映している．

原稿作成を大いに助け，貴重な意見をしてくれた N.I. シャファレヴィッチにも，大変感謝している[2]．

モスクワ，1984 年　　　　I.R. シャファレヴィッチ

---

[1] ［訳註］ロシア語版にはこの後，本文中の補題や定理の書き方についての注意書きがあるが，本書では英語版に従って，定理などは独立した段落として前後に空行を入れ，主張を強調文字にするという処理をしているので省略した．

[2] ［訳註］ロシア語の原著の初版は 1986 年に出版され，M. リードによる英訳が 1990 年に Springer-Verlag 社の Encyclopaedia of Mathematical Sciences の第 11 巻 Algebra I として出版され，1997 年に単行本として 2 刷りが出版されている．さらに 1999 年にはロシア語の原著第 2 版が出版されており，この「まえがき」は，ロシア語初版と全く同じものだが，謝辞には追加がある．

日本語版まえがき

本書の目的は，代数の専門家でない数学者や数学を用いる物理学者に理解できる言葉を使って,「代数学とは何か？」という問に答えることであった．しかし何よりもまず，自分自身に答える必要があった．すると，このことが自明でないように見えてきて，私にとっても興味深い問題になったのである．ときには，それは純粋に研究者の心理の問題のようにも思える．数学のある部分が,（たとえば）一方で幾何学に属すようにも，他方で代数学に属すようにも考えられることがある．たとえば，大学で教えられている線形代数学とは何だろうか？　加群（体上の有限の長さの加群）の代数学だろうか，それとも有限次元空間の幾何学だろうか?　それでも私には，代数学が数学の中で占めている位置をはっきりと示すことができるように思える．代数学は，他の分野（幾何学，解析学，物理学さえも）の情報を，それを使って書き下すことができるアルファベットのようなものである．しかしこのアルファベットには2つの変わった特徴がある．1つには，アルファベットで書かれたテキストをある規則で操作することができることであり（代数学者はこの操作を代数演算と呼んでいる），書き下された真実に関する新しい情報を与えてくれる新しいテキストがこうして得られるのである．そしてもう1つは，代数学が，ギリシャ語やラテン語のようなある固定したアルファベットを使うのではなく，数学や物理学の新しい分野を研究するための新しいアルファベットを創り出すことである（整数，複素数，群はそのような異なるアルファベットの例である）．もちろん，これらすべてはかなり漠然としたものであり，本書全体がこの考え方をもっと具体的な内容で満たすための試みなのである．

I.R. シャファレヴィッチ

訳者まえがき

まず目次を眺めてほしい．それから著者のまえがきと日本語版へよせた言葉と，本文の第１節を読んでほしい．言葉をかえ，繰り返し語る著者の言葉を，じっくりと読んでみてほしい．著者が代数学に持っているイメージが，そして世界のすべての人に向けたその思いが伝わってくるだろう．世界を理解するために，人には視座が必要であり，ワイルの言うように対象を「座標化」することが必要になる．そのための道具が代数学である．対象が多様になり複雑になっていけば，座標化に用いる道具も単なる「数」というわけにはいかなくなる．どんな道具があるのか，そしてどんな対象のどんな現象を理解することに用いられるのか，それが本書で語られている．

この本を手に取った読者は，ある種の違和感を感じるかも知れない．教科書のようでも，（日本の数学の教科書のイメージからいえば）教科書とは言えない．お話しだけの啓蒙書かといえば，とてもそんな水準ではない．日本人の数学者が書こうとしてもおそらく本にすることは難しかっただろう（日本人の数学者に書くだけの能力がないといっているのでない）．証明がついているものもあればそうでないものもある．しかし，それだけの本ならいくらもある．問題はそういうことではない．証明しないのではなく，する必要などない．そう感じさせるように話が進んでいく．定義を述べずにどんどん例を挙げていく．講義録なのかと言えば，むしろそれより，お茶でも飲みながら，世間話でも語るように数学を語るという風情である．

少し違うが，訳者は学生時代に聴いた永田雅宜先生の代数学の講義を思い出した．日本の大学のことだから，きちんと定義も与えられ，定理を述べられ，証明もされるのだが，証明のポイントのあたりでふいと振り向かれて笑顔を見せられ，学生を見渡して誰かの目を見てこくっとうなずかれる．先生が歩いておられる数学の世界についてきているかなという確認の振り返りだろう．数学世界のハイキングの引率者のようだった．そのとき，誰かが１人

うなずけば先生の証明は終りである．誰もうなずかないときだけ，別の言い方に変えて話が続く．その誰かが，特定の 1 人の学生なら，その学生だけはわかっている訳で，後からその学生に聴けばよいのだが，不幸なことにうなづくものは 1 人ではない．当時は 5, 6 人くらいが交代でうなずいていた．そのときにすべてわかったものは，多分 1 人もいなかっただろう．

先生の直ぐ後を歩いて，先生の見ておられるものを見ているという気持ちがするときは，確かにわかるのだ．しかし，少し後を歩くと，先生の体に隠れて見えるべきものが見えない．すると，全くと言ってよいほどわからない．誰もうなずかないときは，ほらという感じで皆の前にその何かを見せて下さる．じっくりと見せていただいたときには，確かに証明（言葉）などいらない，明らかなものであることがわかる．そんなことを思い出した．

シャファレヴィッチの周りには天才秀才がひしめいているに違いない．彼らに対して，多分非常に気持ちよく，自分の見ている世界を語っているのだろう．だから，ことさらな証明などは不必要なのだろう．

訳者も本書を訳しながら，最初はかなり不満だった．定義もしないものをどんどん使うし，定理もなぜきちんと証明せず，中途半端な記述なんだろうか．もちろんこれだけの内容に，すべて証明をつけていたら，何倍もの分量になるだろうが，それなら内容を削ればよい．そう感じていた．それがあるとき気がついたのだ．これは，単なる教科書なのではない．これはとんでもないものだ．豊かで深く，広く伸びやかに，数学の，そして代数学の命を描いた，そう「語り」そのものではないかと．

日本の文化で近いものを強いて挙げれば，講談のようなものかも知れない．難しい言葉が氾濫しているが，どの言葉も説明するわけではない．それでも調子に合わせて，気持ちよく聴いていると，だんだん意味がわかってくる．少なくともわかった気持ちになってくる．そういう気持ちで本書に向かうと，とても気持ちがよくなってくる．高く低く調子が整えられ，ときおり張扇の音が聞こてくる．こういう数学があってもよいではないか．

証明は，気になるなら読者が自分でつければよい．必要なヒントは十分に述べられている．そのとき証明ができなくても，先の語りを聴けばよい．いつか自分で証明がつけられるようになるまで，何度も何度も聴けばよい．定義してない言葉もそのうちわかるようになる．「読書百遍，意自ずから通ず」

であり，そうして身についたものだけが後で役に立つ．

名人シャファレヴィッチの数学講談，始まり始まり，という訳で，おしゃべりな訳者も口をつぐんで，今回は黒子に徹する所存．

数学に慣れない人のために老婆心からの注意を 1 つ．証明はほとんどついていないが，著者が必要と感じた証明がついていることもある．いろいろな主張や定理に,「容易にわかる」「容易に確かめられる」「容易に示される」「容易に証明できる」と書いてあることがある．大抵はこの順に証明が難しくなる.「容易に」の代わりに「… は難しくない」と書いてあることもあるが，これはもう初心者には不可能な位に難しい．さらに，それらの形容もなく，単に「証明することができる」とか「… の証明が存在する」となったら，ことによると何 10 ページにもなる証明が必要になるかも知れない.（言葉の流れのため，必ずしもそうなっていないこともあるのだが.）

だから，証明を考えてわからなくても，あきらめたり，元気をなくしたり，嫌になったりしないでほしい．そういうときはしばらく証明のことは忘れて，先に進むなり，自分の知っている例で確かめるなりしてほしい．特に，例で確かめることは重要である．優れた数学者は自分にとって慣れ親しんだ領域というか，例をたくさん持っていて，大抵はそれで事情を調べるということをしている．訳者はかって，モスクワで I.M. ゲリファントのセミナーの後ろに座り続けていたことがあるが，彼は新しい概念や事実に出会うと，それをいつも SL_2（2 次の特殊線形群）で確かめさせていたものである．

数学の本に慣れた人のための注意も 1 つ．本書の中の定理や命題などは，ロシア語版（原著）では単に ◁ と ▷ で囲んであるだけで，分かち書きされてもいなければ「定理」とも書いていない．番号も後で引用する場合にだけ，通し番号があるだけである．それに対して，例は大切にされていて，例には必ず,「**例 1.**」と字体を変えて見出しがついていて，多くの場合タイトルまでついている．日本の読者にはその形式はあまりにも慣れないだろうから，英語版でそうなっているように「**定理 I.** 」と見出しをつけ，前後に 1 行の空白を入れた．それ自身は見やすくはなったのだが，本書の別の箇所でこの部分を引用するときに少し問題が起こる．本書では例が主役なのである．だから，たとえば「ある節の例 4 でこれこれのことを述べた」と書いてある場合，

例 5 の直前に書いてあることもある．しかも，例 4 の見出しからその箇所までの間にいくつもの定理があることもあるのである．注意が必要とされるだろう．

本書を英語版で知ったこともあり，英語版から訳し始めた．明らかな間違い（ミスプリントと思われるもの）だけは断らずに直したが，内容や表現形式にときどき違和感を感じることがあった．半分ほど訳したときにロシア語の原著の第 2 版を入手した．ロシア語の原書と英語版とは記号の使い方，用語の選択，主張の強弱，また表現のニュアンスが異なる部分があり，さらに英語版出版後の第 2 版なので，いくつかの追加・修正が施されている．ロシア語による数学の表現形式が，日本人の，少なくとも訳者の感覚に親しむ所為(せい)でか，違和感が極端になくなった．そこで，基本的にはロシア語第 2 版に準拠しながら，日本の読者にとって理解しやすいことを念頭に両者を取捨選択しながら，内容や形式を決めて行くことにした．

そうではあっても，原書にも当然のミスプリントがあり，英語版にもそれゆえの間違いもある．訳者が熟知しない話題も多く，ときには式の形から違和感を覚えて計算することでミスプリントを発見することがある．そういう計算のいくつかは訳註として付して読者の参考にしたが，すべての式と事実を確かめる余裕と能力が不足していて，原書の誤りのすべてを修正できたという自信はない．また，訳者に責任のある新しいエラーも生まれている可能性があるが，ホームページ（奥付参照）に修正箇所を挙げるほか，刷りを改める都度改定していく予定である．誤りに気づいた読者は，訳者に知らせてほしい．

ところで，すべてを一読で理解するのには，かなりの量の予備知識が必要である．数学の専門家であっても，さらには代数の専門家であっても，すべてを持っている人は少ないのではないだろうか．しかし，それはむしろ，著者が読者に予備知識をあまり要求していないということである．数学のおもちゃ箱であるかのように，これでもかこれでもかと，代数学の遊び道具を繰り広げてみせてくれる．本書はまさに，実験数学の素材というか，代数学遊びのブロック・ピースの集まりである．遊び方のわからないゲームが混じっ

ていても，おもちゃ箱自体の罪ではない．遊べるものだけで遊んでいるうち，気が向いたら別のゲームにも取り組めばよい．

そうは言っても，わからぬことばかりでは辛いと感じる読者もいるだろう．そのために，ときどき訳註をつけた．訳註は初心者ないし非専門家のため，とは言うものの，もとは辛いと感じた訳者自身のためでもある．訳註などはつけないまま，理解して頂くのが一番である．訳註がくどいときは訳者の無能さの現れであり，建前としてさえ完璧を期すなどできない．本来，翻訳書は初心者ないし非専門家のためのものである．この分野にまだ興味を持っていない人のために，興味を持ってもらうのが目的である．専門家は原書を読めばよいし，その方が当然，原著者の意図を理解しやすい．

訳語が確定していない場合は，できる限り，岩波数学辞典第3版に準拠した．

ロシアとの間の通信事情もあり，著者が入院しておられた時期であったということもあり，頻繁に連絡をとることはできなかったが，著者から送られてくる電子メールでの返事からは，とても親切でとても若々しい感性が感じられた．狭い専門性にとらわれず，広く高い視野で，世界を考え，数学を愛し，代数を語っている本書の著者の人となりには，敬愛の念を抱くばかりである．

最後に，いつものことながら翻訳原稿を通読し貴重なコメントをいただいた佐波学氏（鳥羽商船高専）に感謝の意を表わしておきたい．

2001年6月，桑名にて　　　　蟹江幸博

目　次

§1. 代数学とは何か？

代数学とは何なのだろう？ 数学の1つの分野だろうか，方法だろうか，それとも心理的な枠組みだろうか？ もちろん，このような質問には，真の答えも短かい答えもある筈がない．ヘルマン・ワイルが「座標化」という発音しにくい言葉[1]で呼んだプロセスに注目し，数学における代数学の位置を記述しようとすることはできる．人は，もっぱら自分の感覚器官，視覚，触覚と，自分の外の世界（外界）の物体を操作するその経験と，それから生まれる直観とに頼って，外界における方向性を見定めるのかも知れない．しかし，別のアプローチもあり得る．つまり，計測によって，主観的な印象を客観的な指標，つまり数に変換することができる．数は無期限に保持することができて，その場にいない別の人にも同じ印象を伝達することができる．そしてこれが重要なのだが，計測の対象に関する新しい情報を生む操作が可能なのである．この2つのことは，1つは幾何学に，1つは代数学に反映されている．このとき代数学は，人と外界との接触において言葉や文字が果たすのと似たような役割を果たしている．2つの思想は密接に関連し合い，代数–幾何の双対性は本書の本質的な部分になっている．双方とも高度に美的な要素を持っていて，芸術で見てみれば，幾何学は絵画に，代数学は音楽に比べられる．

最も古い例は**数える**（座標化）ことと**計算する**（操作）ということで，それによって，対象（もの）をすべて手にしなくても，個数に関する結論を得ることができるようになる．多様な対象を「計測する」または「数として表わす」という試みから，自然数以外の，分数や負の数が生まれた．長さ1の辺を持つ正方形の対角線を数として表わそうとすることで，古代初期[2]の数学の有名な

---

[1] ［訳註］「座標化」の意味についてはワイル [109] 第 I 章 §4 参照．ここで発音しにくいと言っているのはワイルの使用した coordinatisation という言葉であり，それを音訳したロシア語の単語はさらに発音しにくいということ．

[2] ［訳註］この「古代」とはもちろん古代ギリシャのことで，「初期」というと，プラトン以前を指すと思ってよい．ここはもちろんピュタゴラス学派を念頭に置いている．

危機が生まれ，無理数の構成が導かれた．

計測とは，実数によって直線上の点を与えることで，さらにもっと広く，多くの物理量を数として表わすことである．ガリレオは，座標化のアイデアを，その時代で最も極端な形で述べている.「測り得るものはすべて測り，まだ測ることができないものはすべて測れるようにせよ.」ガリレオの生きた時代に始まったこのアイデアは輝かしい成功をおさめた．解析幾何の創造によって，平面の点を数の対で，空間の点を数の 3 つ組で与えることができるようになり，数を操作することによって，新しい幾何学的事実が発見されるようになった．しかし，解析幾何の成功は主に，点ばかりでなく，曲線や曲面なども，数に「帰着」されるということに基づいている．たとえば，平面曲線は方程式 $F(x,y)=0$ で与えられるが，直線の場合は F は 1 次多項式で，それは 3 つの係数，つまり，x と y の係数と定数項で与えられる．円錐曲線の場合は，6 つの係数で定まる 2 次曲線になる．F が n 次多項式であれば，$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 個の係数で定まることが容易にわかり，対応する曲線は，点が座標で与えられるように，これらの係数によって与えられる．

方程式の根を数として表わすために複素数は導入され，これによって，楕円関数やリーマン面を含む，まったく新しい数学の領域への一歩が踏み出された．

長い間，ガリレオの示した道は,「あらゆるもの」を既知のまた反論の余地のない数の集まりによって計測することを目指すもので，問題はまさに，デカルト座標や新しい物理学的な道具のような，ますます精巧な計測法を作り出すことだと考えられてきた．とは言え，ときには，既知のものと思われていた数（つまり，単に数えて得られたもの）では不充分だと思われるようになってきた．こうして生まれた「危機」は，数の概念を拡張したり，新しい数の形を作り出したり，そしてそれがそのうち唯一の可能性だと考えられるようになって，克服されてきた．いずれにせよ，どの場合でも，数の概念は，原理的には，完全に明晰なものだと考えられ，拡張の方向にのみ発展してきた．

1, 2（そして,「沢山」）$\Rightarrow$ 自然数 $\Rightarrow$ 整数 $\Rightarrow$ 有理数 $\Rightarrow$ 実数 $\Rightarrow$ 複素数

しかし，たとえば，行列は，この鎖には含まれ得ない，全く独立な「数に類似な」対象の世界を作っている．時を同じくして四元数が発見され，それ

から他の「超複素数系」（現在では代数と呼ばれている）が発見された.「無限小変換」は微分作用素へと導かれ，それに対する自然な演算はある全く新しいもの，つまり「ポアソン括弧」である．代数学には有限体が生まれ，整数論には p 進数が生まれた．すべてを包摂する数の唯一の概念を見つける試みにはまったく希望がないことが，しだいに明らかになってきた．このような状況の中では，ガリレオの宣言した原理は厳し過ぎると非難することもできただろう．というのは,「まだ測れるようになっていない**あらゆるもの**を計測する」という要求によって，頑に測られることを拒むものははっきりと差別され，科学の，そしておそらく理性さえの，関心事の領域から排除されて（ガリレオの用語での 2 次要因 (secunda causa) になって）しまう．論争の素になる「あらゆるもの」という言葉を，控え目に，物理と数学の対象に限定したとしても,「通常の数」では「測り」得ないようなものが次々と生まれてきたのである.

そうは言っても，座標化の実現に利用される「数に類似な対象」の集合が，座標化しようとする物理や数学の対象の世界とまさに同じように，多様であり得ることを認めるのであれば，座標化の原理を維持することは可能である.「座標」の役を果たす対象が満たさないといけない条件は，非常に一般的な性格のものだけである.

つまり，それらが個々に区別可能なものでなければならないということである．たとえば，直線上のすべての点はまったく同じ性質を持ち（直線が等質であること），その上に指を置くことだけで点を指定できる，と同時に，数はすべて，3, 7/2, $\sqrt{2}$, π などのように，個別なものである（同じ原理が，飼い主に区別できない生まれたての犬の赤ん坊を区別するため，その首に違う色のリボンを巻くときに使われている）.

広い範囲の現象に共通な性質を反映するように，十分抽象的であるべきでもある.

研究している状況の基本的な特徴が，加法，乗法，大小比較，微分，ポアソン括弧を作ることなどの，座標化される対象に対して実行することのできる**操作**に反映されているべきでもある.

ここで，我々の「テーゼ」をもう少し詳しく定式化し直してみよう.

テーゼ．数学研究のテーマとなる任意の対象（曲線と曲面，写像，対称性，結晶，量子力学的量など）は，「座標化」または「計測」され得る．しかし，そのような座標化に対して，「通常の」数は極めて不十分なものである．

逆に，新しいタイプの対象に出会うとき，それらを座標化するための新しいタイプの「量」を構成する（もしくは発見する）ことを余儀なくされる．このようにして生まれる量の構成や研究こそが，数学における代数学の占める場所を（もちろん非常に近似的にだが）特徴付けるのである．

このようにして見ると，代数学のどんな分野の発展も 2 つの段階からなることになる．1 つはある座標化問題からの新しいタイプの代数学的対象の誕生であり，もう 1 つはそれ以降の成長，つまり，このクラスの対象の理論の体系的な発展である．それが，対象の生まれた分野と密接に関連していることもあるし，時にはほとんど完全に関係がないこともある．以下では，この 2 つの段階を見逃さないようにするつもりである．しかし，代数学コースはもっぱら第 2 段階だけに関したものであることが多いので，第 1 段階に対しても幾分多くの注意を払うようにしてバランスをとるようにする．

これまで考えてきたものほど標準的ではない座標化の例を 2 つ挙げて，本節を締めくくることにしよう．

例 1．量子力学の辞書は，基本的な物理的概念を「座標化」する数学的対象を記載するものである．

物理的概念	数学的概念
物理系の状態	無限次元複素ヒルベルト空間の直線 φ
スカラー物理量	自己共役作用素
同時に計測できる量	可換な作用素
状態 φ で厳密な値 λ をとる量	固有値 λ に属する固有ベクトルとして φ を持つ作用素
計測で得ることの可能な，量の値の集合	作用素のスペクトル
状態 φ から状態 ψ への遷移確率	$\lvert(\varphi,\psi)\rvert$，ただし $\lvert\varphi\rvert=\lvert\psi\rvert=1$

例 2. 結合性と平行性の公理系に対する有限モデル. まずちょっとした脱線をする. 幾何学の公理的構成において, 公理のすべてをではなく, その一部だけを考えるということをよくすることがある. (具体的に述べるため, ここでは平面幾何に限っての議論とする.) そのとき, 公理群を選んだときの実現可能性の問題が生まれる. その公理群が満たされるような,「通常の」平面幾何とは異なる, 別の対象の系が存在するだろうか？ という問題である. ここで, 非常に自然な「結合性と平行性」の公理群を考えてみよう.

(a) 異なるどんな 2 点に対しても, それを通る直線が 1 つかつただ 1 つ存在する.

(b) 直線とその上にない点が与えられると, その点を通り, この直線に交わらない (つまり, 平行な) 直線が 1 つかつただ 1 つ存在する.

(c) 1 直線上にない 3 点が存在する.

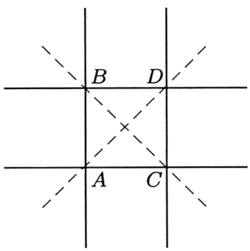


図 1

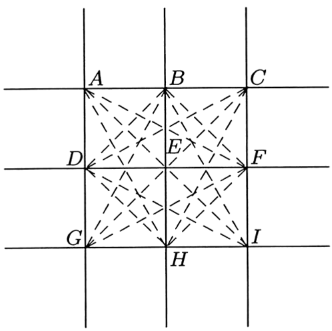


図 2

この公理の集合を実現する多くのモデルがあり, 中には我々の直観にまったく反するような, 有限個の点と直線からなるモデルもある. そのようなモデルを 2 つ, 図 1 と図 2 に描いておいた. 図 1 のモデルには, 4 つの点 A, B, C, D と 6 本の直線 $AB, CD; AD, BC; AC, BD$ がある. 図 2 のモデルには, 9 つの点 $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ と 12 本の直線 ABC, DEF, GHI; ADG, BEH, CFI; AEI, BFG, CDH; CEG, BDI, AFH がある. 公理

(a), (b), (c) が満たされていることは，読者にも容易に確かめることができるだろう（この直線のリストでは，平行線の族はセミコロンによって分けられている）．

さて基本のテーマに戻って，今構成した公理 (a), (b), (c) のモデルの「座標化」を試みてみよう．第 1 のモデルに対しては次のように構成する．シンボル $\mathbb{0}$ と $\mathbb{1}$ がそれぞれ整数が偶数と奇数であるという性質を表わすこととし，$\mathbb{0}$ と $\mathbb{1}$ に対する演算を，対応する整数の性質が加法と乗法に関して振る舞うのと同じようにして定義する．たとえば，偶数と奇数を足すと奇数になるので，$\mathbb{0}+\mathbb{1}=\mathbb{1}$ と書く，などとする．結果は，図 3 と図 4 の「加算表」と「乗算表」の形に表わすことができる．

$+$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$

図 3

$\times$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$

図 4

このように演算を定義した量 $\mathbb{0}$ と $\mathbb{1}$ の対は，図 1 の「幾何」を座標化するのに役立つ．このために，点の座標 (X, Y) を

$$A=(\mathbb{0},\mathbb{0}),\ B=(\mathbb{0},\mathbb{1}),\ C=(\mathbb{1},\mathbb{0}),\ D=(\mathbb{1},\mathbb{1})$$

と与える．この幾何での直線が 1 次方程式

$$AB:\mathbb{1}X=\mathbb{0};\qquad CD:\mathbb{1}X=\mathbb{1};\quad AD:\mathbb{1}X+\mathbb{1}Y=\mathbb{0};$$

$$BC:\mathbb{1}X+\mathbb{1}Y=\mathbb{1};\quad AC:\mathbb{1}Y=\mathbb{0};\quad BD:\mathbb{1}Y=\mathbb{1}$$

で定まっていることは容易に確かめられる．実際，2 つの量 $\mathbb{0}$ と $\mathbb{1}$ で作ることのできる自明でない 1 次方程式は，6 つだけである[3]．

図 2 の幾何に対する構成も同様だが，幾分複雑になっている．すべての整数を，

[3] ［訳註］形式的には $aX+bY=c$，$a,b,c=\mathbb{0},\mathbb{1}$ と，8 つの 1 次方程式があるが，$a=b=\mathbb{0}$ の 2 つの場合は，自明に成り立つか，自明に成り立たないかのどちらかである．

$$
\begin{aligned}
U &= 3\text{ で割り切れる整数,}\\
V &= 3\text{ で割ると }1\text{ 余る整数,}\\
W &= 3\text{ で割ると }2\text{ 余る整数}
\end{aligned}
$$

と，3 つの集合に分けたとしよう．シンボル U, V, W に対する演算は第 1 の例のように定義される．たとえば，V の数と W の数との和は U の数を与えるので，$V+W=U$ と置く．同様に，W の 2 つの数の積はいつも V の数になるので，$W \cdot W = V$ と置く．読者は容易に，対応する加算表と乗算表を書き下すことができるだろう．

このとき，図 2 の幾何が，この量 U, V, W によって，次のように座標化されることは容易に確かめられる．点は

$$A=(U,U),\ B=(U,V),\ C=(U,W),\ D=(V,U),\ E=(V,V),$$

$$F=(V,W),\ G=(W,U),\ H=(W,V),\ I=(W,W)$$

であり，直線はまた，この 3 つのシンボル U, V, W を使って書くことのできる，すべての可能な 1 次方程式によって与えられる．たとえば，AFH は $VX+VY=U$ によって与えられ，DCH は $VX+WY=V$ によって与えられる[4]．

こうして，有限の幾何を座標化するために，有限の数系が構成された．後にこの構成の議論に戻ることにする．

わずかの例ではあるが，もう，あれやこれやの「座標化」でどのような対象が使われ得るかというイメージが得られただろう．まず，使われる対象の範囲は厳密に述べられている必要がある．言い換えると，これらの対象を要素とすることができる集合（または，おそらくは幾つかの集合）が指定されていなければならない．次に，これらの対象を操作することができなければならない．つまり，集合の 1 つまたは複数の要素から新しい要素を与える**演算**が定義されていなければならない．差し当たり，使われる集合の性質に対して，これ以上の制限は課さないことにする．と同時に，k 個の要素から新しい要素を作る演算は，まったく任意の規則であってよい．それでもやはり，これ

4 ［訳註］このあたりの議論は，$U=\mathbb{0}$, $V=\mathbb{1}$, $W=\mathbb{2}$ とするとイメージが湧きやすいかも知れない．

らの演算は通常，数の演算と何かしらの類似性を持つことになる．特に，これから議論する状況では，いつも $k=1$ または 2 である．以下のすべての構成で手本となる演算の基本的な例は，数に対しその負数をとる演算 $a \mapsto -a$, 0 でない数 b に対しその逆数をとる演算 $b \mapsto b^{-1}$（ともに $k=1$），それに 2 つの数 a, b に対して和 $a+b$ と積 ab を与える演算（ともに $k=2$）である．

§2. 体

§1で述べたような「演算を持つ集合」で，我々の持っている数の直観に最も近いタイプのものから記述を始めることにしよう．

体とは，2つの演算が定義されている集合 K で，それぞれの演算は K の2つの元を第3の元に対応させるものである．この演算は**加法**と**乗法**と呼ばれ，それぞれを2つの元 a と b に作用させた結果を $a+b$ また ab と書く．演算は以下の条件を満さなければならない．

加法：

交換性： $a+b=b+a$.

結合性： $a+(b+c)=(a+b)+c$.

零元の存在：任意の a に対して $a+0=a$ となるような元 $0 \in K$ が存在する（この元が一意的であることを示すことができる）．

負元の存在：任意の a に対して $a+(-a)=0$ となるような元 $(-a)$ が存在する（この元が一意的であることを証明することができる）．

乗法：

交換性： $ab=ba$.

結合性： $a(bc)=(ab)c$.

単位元の存在：あらゆる a に対して $a1=a$ となるような元 $1 \in K$ が存在する（この元が一意的であることを証明することができる）．

逆元の存在：どんな $a \neq 0$ に対しても $aa^{-1}=1$ となるような元 a^{-1} が存在する（与えられた a に対して，この元が一意的であることを示すことができる）．

加法と乗法：

分配性： $a(b+c)=ab+ac$.

最後に，体は **0** だけからなるものでないこと，またはこれと同値な条件 $0 \neq 1$ を仮定する．

これらの条件をまとめて，**体の公理**と呼ぶ．

よく見る代数学の恒等式の

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

や

$$a^{-1} - (a+1)^{-1} = a^{-1}(a+1)^{-1}$$

は体の公理から導かれる[1]．整数 $n \geq 0$ に対する na という表現は $a + a + \cdots + a$（n 回）を意味していて，元 a と（K の元ではないかも知れない）数 n との積ではないことだけは，覚えておく必要がある．

任意の体 K 上では（つまり，議論に現れるすべての座標，係数などが K に属すると仮定すれば），長さ，多項式や有理式の代数などが出てこないような線形代数や解析幾何が自然に構成される．

体の基本的な例には，有理数体 $\mathbb{Q}$，実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$ がある．

もし体 K の元が体 L に含まれ，双方の演算が一致するとき，K を L の**部分体**，L を K の**拡大体**と言い，$K \subset L$ と書く．たとえば，$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ である．

例 1. §1 で，図 1 の「幾何」に関連して，$\mathbb{0}$ と $\mathbb{1}$ からなる集合とその上の加法と乗法を定義した．$\mathbb{0}$ を零元，$\mathbb{1}$ を単位元として，これが体になることは容易に確かめられる．そこで，$\mathbb{0}$ を 0 と書き，$\mathbb{1}$ を 1 と書くと，図 4 の「乗算表」は $\mathbb{Q}$ で 0 と 1 を掛ける規則そのものであり，図 3 の「加算表」は $1+1=0$ であることが異なっている．このようにして構成された $\mathbb{0}$ と $\mathbb{1}$ だけからなる体を $\mathbb{F}_2$ と書く．同様に，図 2 の幾何に関連して考えられた元 U, V, W もまた体をなす．そこでは $U=0$，$V=1$，$W=-1$ である．こうして，元の数が有限（2 つまたは 3 つ）の体の例が得られた．有限個の元だけを持つ体（つまり，有限体）は多くの応用を持つ非常に興味深い対象である．有限体は，図 3 と 4 でしたように，その元の加算表と乗算表を書き下すこと

[1] ［訳註］たとえば，$(a^{-1}-(a+1)^{-1})(a(a+1)) = a^{-1}(a(a+1)) - (a+1)^{-1}(a(a+1)) = (a+1) - a = 1$ とすると，後者の式が得られる．

によって与えることができる．§1 で，有限の対象の集合における幾何のある公理群の実現の問題と関連してこのようなものを扱ったが，それらは，有限の対象の集合における体の公理の実現として，代数学的には，まさに自然に生まれるものなのである．q 個の元からなる体を $\mathbb{F}_q$ と書く．

例 2. 未知数 x と体 K の任意の元から，加法，乗法，除法によって得ることができる代数的な表示式は，

$$\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \tag{1}$$

という形に書くことができる．ここで，$a_i, b_i \in K$ で，すべて $b_i = 0$ なのではないとしている．この形の表示は x の**有理式**，または**有理関数**と呼ばれる．つまり，分母が 0 にならない限り，体 K（や K を含む体 L）の元 x に，与えられた表示式を対応させることによって，関数と考えることができる．有理関数の全体は体をなし，**有理関数体**と呼ばれ，$K(x)$ と書かれる．この定義に関連していくつか問題があるが，それは §3 で議論する．体 K の元は「定数」関数として有理関数に含まれるので，$K(x)$ は K の拡大体である．

同様にして，2 変数の有理関数体 $K(x,y)$ や，任意個数の変数の有理関数体が定義される．

2 つの体 K' と K'' の**同型**とは，それらの元の間の 1 対 1 対応 $a' \leftrightarrow a''$ であって，$a' \leftrightarrow a''$ かつ $b' \leftrightarrow b''$ から，$a' + b' \leftrightarrow a'' + b''$ と $a'b' \leftrightarrow a''b''$ が導かれるもののことである．2 つの体は，その間に同型が存在するときに，**同型**であると言う．同型な体 L' と L'' が，ともに同じ体 K の拡大体であって，その間の同型で K の各元を固定するものがあるとき，**体 K の上の同型**と言い，L' と L'' は K **上で同型**であると言う．体 K' と K'' の同型を $K' \cong K''$ と書く．

L' と L'' が有限体であれば，L' と L'' が同型であることは，それらの加算表と乗算表が同じであることを意味していて，つまり，L' と L'' の元の書き方が違っているだけということである．任意の体に対する同型の概念も，意味においては同じである．たとえば，ある直線 a をとって，点 O に印をつけて，その上に「単位区間」OE をとったとしよう．そのとき，a に含まれる向きづけられた区間（つまりベクトル）に関する加法と乗法を，幾何的に定義

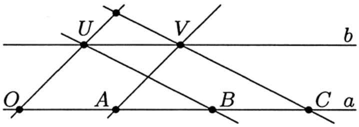


図 5

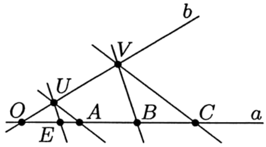


図 6

することができる．その構成は図 5 と 6 で与えられる．図 5 では，b は a に平行な任意の直線，U をその上の任意の点とし，$OU \parallel AV$ かつ $VC \parallel UB$ であり，$OC = OA + OB$ となっている．図 6 では，b は O を通る任意の直線で，$EU \parallel BV$ かつ $VC \parallel UA$ であり，$OC = OA \cdot OB$ となっている．

演算をこう定義すると，直線の区間全体は体 P をなす．体の公理をすべて確かめることは，一連の自明でない幾何の問題である．それぞれの区間を実数に，たとえば無限 10 進小数に対応させることにより（これも計測のプロセスである！），P と実数体 $\mathbb{R}$ との同型が得られる．

例 3. 多項式 F に対して，$F(x,y) = 0$ で与えられる平面曲線に戻ろう．この曲線自身を C と書く．C を F の係数の集合に対応させるのは，最も素朴な「座標化」の方法である．ここでは，もっと厳密で効果的な別の方法を述べよう．

定数でないどんな多項式 $F(x,y)$ も，それぞれはそれ以上分解されないような，定数でない，多項式の積として分解できることを示すのは難しくない．$F = F_1F_2\cdots F_k$ がそのような分解であれば，方程式 $F = 0$ を満たす曲線は，それぞれ方程式 $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ..., $F_k = 0$ を満たす k 本の曲線の和集合になる．定数でない多項式の積に分解されない多項式を，**既約**であると言う．以降，F は既約であると仮定する．

2 変数の任意の有理関数 $\varphi(x,y)$ を考える．$\varphi(x,y)$ は 2 つの多項式の比

$$\varphi(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{2}$$

として表わされる．分母 $Q(x,y)$ は多項式 F で割り切れないとしよう．φ

を C の点だけの関数と考えよう．$Q(x,y)=0$ と $F(x,y)=0$ を同時に満たす点 (x,y) では，定義されていない．上で与えた仮定のもとで，このような点が有限個しかないことを証明することができる．以下の議論を実質的なものにするために，曲線 C が無限個の点を持つと仮定する（つまり，$x^2+y^2=-1$，$x^4+y^4=0$ などの曲線を除外するのである．複素座標を持つ点も考えるのなら，この仮定の必要はない）．すると，$\varphi(x,y)$ は C の点の集合の上の関数（単に，C 上の関数とも言う）を定めるが，有理関数 (1) が 分母が 0 になるような有限個の x の値では定義されていないのと同じことで，有限個の点では定義されていないという可能性がある．こうして得られた関数を C 上の**有理関数**と呼ぶ．曲線 C 上の有理関数全体は体をなすことが証明できる.（たとえば，逆元の存在の証明をしよう．$P(x,y)$ が $F(x,y)$ で割り切れないときに限り，関数 φ は C 上の 0 でない関数を定義し，そのとき関数 $\varphi^{-1}=\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ が（分母が F で割れないという）関数 φ に対して課した条件を満たすことが証明できる.）**曲線 C 上の有理関数体**を $\mathbb{R}(C)$ と書く．これは実数体 $\mathbb{R}$ の拡大体である．任意の体 K に座標を持つ点を考えると，この構成での $\mathbb{R}$ を容易に K に置き換えることができる．

曲線 C に体 $K(C)$ を対応させることは，その方程式の係数よりも，C を「座標化」する方法として，遥かに厳密である．何よりも，座標系 (x,y) から別の座標系 (x',y') に移れば，曲線の方程式は変わってしまうが，容易にわかるように，体 $K(C)$ は同型な体に置き換わる．さらに重要なことは，$K(C)$ と $K(C')$ との体 K 上の同型が，曲線 C と C' の間の重要な関係を与えるのである．

最初の例として，C が x 軸であるとしよう．すると，C の方程式は $y=0$ であるから，関数 φ を C に制限するなら，(2) で $y=0$ と置かなくてはならず，x の有理関数

$$\varphi(x,0)=\frac{P(x,0)}{Q(x,0)}$$

が得られる．

こうして，この場合，体 $K(C)$ は有理関数体 $K(x)$ に同型である．明らかに，C が任意の直線であっても同じことが起こっている．

C が 2 次曲線の場合に進もう．この場合にも，体 $K(C)$ が 1 変数有理関

数体 $K(t)$ と同型であることを証明しよう．このために，曲線 C 上に任意の点 (x_0, y_0) を選び，それと変数座標を持つ点 (x, y) とを結ぶ直線の傾きを t とする（図 7 参照）．

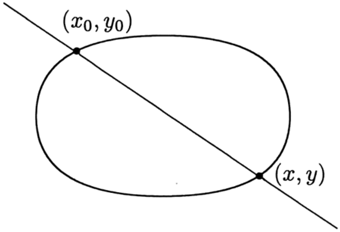


図 7

言い換えれば,（C 上の関数として）$t = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ と置くのである．x と y は曲線 C 上の関数として t の有理関数であることを証明しよう．このために，$y - y_0 = t(x - x_0)$ であり，$F(x, y) = 0$ が曲線 C の方程式ならば，C 上では

$$F(x, y_0 + t(x - x_0)) = 0 \tag{3}$$

であることを思い出そう．言い換えれば，$K(C)$ では関係式 (3) が満たされている．C は 2 次曲線なので，これは x に関する 2 次方程式 $a(t)x^2 + b(t)x + c(t) = 0$ となる（係数には t が含まれる）．しかし，この方程式の 1 つの根は知られている．つまり，$x = x_0$ は根である（これは単に，(x_0, y_0) が C の点であるということの反映である）．そのとき，もう 1 つの根は，根の和が $-\dfrac{b(t)}{a(t)}$ に等しいという条件から得られる．つまり，t の有理関数としての表示 $x = f(t)$ が得られ，同様な表示 $y = g(t)$ が得られる．もちろん，$F(f(t), g(t)) = 0$ である．こうして，$x \leftrightarrow f(t)$，$y \leftrightarrow g(t)$ かつ $\varphi(x, y) \leftrightarrow \varphi(f(t), g(t))$ とすれば，体 $K(C)$ と $K(t)$ との K 上の同型が得られる．

こうして得られた同型の幾何学的な意味は，曲線 C の点の有理関数 $x = f(t)$，$y = g(t)$ によるパラメータづけができることにある．曲線 C が方程式

$y^2 = ax^2 + bx + c$ を持てば，C 上では $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ であり，上の結果を別の形で言えば，x と $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ がある第 3 の関数 t の有理関数で表わすことができるということになる．この表示は，たとえば，不定積分を計算するときに役に立つ．φ を有理関数とするどんな積分

$$\int \varphi(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$$

も，置換によって t のある有理関数の積分に帰着し，したがって初等関数で表わすことができることが示される．解析学ではこの置換を**オイラーの置換**と言う．もう 2 つ，応用を述べよう．

(a) **三角関数体**は，$\sin\varphi$ と $\cos\varphi$ のすべての有理関数の作る体として定義される．$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ だから，この体は，方程式 $x^2 + y^2 = 1$ の円 C に対する $\mathbb{R}(C)$ と同型である．また $\mathbb{R}(C)$ が $\mathbb{R}(t)$ と同型であることがわかっている．これが，それぞれの三角方程式が代数方程式に帰着し得る理由である．

(b) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の場合，$x_0 = 0$, $y_0 = -1$ と置くと，上の構成から

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{4}$$

という公式が得られる．古代に遡る数論の問題に，$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数 a, b, c を見つけるという問題がある．$\dfrac{a}{c} = x$, $\dfrac{b}{c} = y$, $t = \dfrac{p}{q}$ と置いて，公式 (4) の共通の分母を払えば，

$$a = 2pq,\ b = q^2 - p^2,\ c = q^2 + p^2$$

というよく知られた表示が得られる．すでに，方程式 $y^2 = x^3 + 1$ を持つ曲線 C の場合でさえ，体 $K(C)$ は有理関数体と同型ではない．このことは，たとえば $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ のような楕円積分は初等関数によっては表せないということに密接に関係している．

もちろん，体 $K(C)$ は他の曲線の研究に際しても重要な役割を果たしている．多項式 $F(x, y, z)$ に対し，方程式 $F = 0$ で与えられる曲面に対しても同様な体が定義されるし，高次元空間を考えるなら，もっと広いクラスの幾何的対象，つまり n 次元空間の中で F_i を n 変数の多項式とする任意の方程式系 $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$ で定義される代数多様体に対しても同様に定義さ

れる．

最後に，解析学で見かける体の例を与えよう．

例 4. 複素数平面のある連結領域上の（または任意の連結複素多様体上の）有理形関数全体は体をなす．

例 5. 円環 $0 < |z| < R$ で収束するローラン級数 $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ 全体の作る集合を考えよう．その際，級数が違えば収束円環は異なってもよいとする．級数に対する演算を通常のように定義すれば，これらは体をなし，**ローラン級数体**と呼ばれる．係数の計算に同じ規則を使えば，2 つのローラン級数の和や積を，たとえ収束する点がない場合でも，定義することができる．こうして**形式的ローラン級数体**が得られる．さらに進んで，係数 a_n が任意の体 K に属するような場合にも，この構成を考えることができる．こうして得られる体を，**体 K に係数を持つ形式的ローラン級数体**と言い，$K((z))$ と書く．

§3. 可換環

「座標化」の最も簡単な例は数えることであり，(0 と負の数を導入すれば) 整数に行き着くが，これは体ではない．すべての（正，0，負の）整数の集合には加法と乗法が定義されていて，これらは体の公理を，1 つの，つまり，あらゆる $a \neq 0$ に対して逆（数）a^{-1} が存在するという公理を除いて（たとえば，$\frac{1}{2}$ がすでに整数でないことから），すべて満たしている．

加法と乗法と呼ばれる 2 つの演算を持ち，あらゆる $a \neq 0$ に対する逆元 a^{-1} の存在の要請以外の，体のすべての公理を満たす集合を，**可換環**という．この際，ただ 1 つの元 0 だけからなる環も定義から除いておかない方が便利である．

逆元の存在公理と $0 \neq 1$ という条件を除いた体の公理を，これ以降，**可換環の公理**と呼ぶことにする[1]．

体の場合と同様に，**部分環** $A \subset B$ や 2 つの環 A と A' との**同型**の概念が定義される．$A \subset A'$ かつ $A \subset A''$ の場合には，A' と A'' との A 上の同型の概念が定義される．環の同型も $A' \cong A''$ と書く．

例 1. **整数環**は $\mathbb{Z}$ と書かれ，明らかに，$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ である．

例 2. 環 A に係数を持つ**多項式環** $A[x]$ は基本的な例である．基本的な役割をするものなので，環 $A[x]$ の定義を詳しく述べることにする．まず，ある性質で特徴付けてみよう．

可換環 B が可換環 A 上の**多項式環**であるとは，$B \supset A$ であり，B に「B の任意の元は

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \qquad (a_i \in A,\ n \geq 0)$$

1 ［訳註］これ以降 §7 までは，単に「環」と言えば可換環のことである．

の形に一意的に書くことができる」という性質を満たす元 x が存在するときに言う．B' がこのような別の環で，$\tilde{x}$ が対応する元であれば，

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \longleftrightarrow a_0 + a_1 \tilde{x} + \cdots + a_n \tilde{x}^n$$

は，容易にわかるように，B と B' の A 上の同型を定めている．このように多項式環は，合理的に，一意的に定義されている．

しかしながら，このことで存在の問題が解けたわけではない．多くの場合には,「関数的な」観点が十分な答えになっている．環 A から A への

$$f(c) = a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n \qquad (c \in A) \tag{1}$$

の形の関数を考える．関数の演算は，通常通り，$(f+g)(c) = f(c) + g(c)$, $(fg)(c) = f(c)g(c)$ と定義する．元 $a \in A$ を定数関数 $f(c) = a$ に対応させれば，A を関数環の部分環と考えることができる．x で関数 $x(c) = c$ を表わすことにすれば，関数 (1) は

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{2}$$

の形になる．しかしながら，ある場合（たとえば，A の元の数が有限で，n が元の数以上の場合）には，f に対する表示 (2) は一意的でないかも知れない．§2 例 1 の体 $\mathbb{F}_2$ のときなら，関数 x と x^2 は同じになっている．このため，別の構成を与えることにしよう．

$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ という「表示」が，体 K の元の列 $(a_0, \ldots, a_n)$ を表わし，$+$ や x^i はそのための便宜的な記号ないし場所を示す記号と考えたものとして，多項式を定義することもできた．こうしてから，和と積を

$$\sum_k a_k x^k + \sum_k b_k x^k = \sum_k (a_k + b_k) x^k,$$

$$\left(\sum_k a_k x^k\right)\left(\sum_\ell b_\ell x^\ell\right) = \sum_m c_m x^m \quad ここで \quad c_m = \sum_{k+\ell=m} a_k b_\ell$$

という式によって与える．むしろもっと具体的に，同じアイデアを次のように定式化することも可能である．環 A の元の無限列 $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ で，ある項の先は 0 からなるもの（この項は列が異なれば異なってもよい）全体の集合を考える．まず列の加法を

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$$

と定義する．加法に関する環の公理はすべて満たされる．さて，積に関しては，まず列と A の元との積だけを考える．つまり，

$$a(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = (aa_0, aa_1, \ldots, aa_n, \ldots)$$

とする．k 番目の場所だけが 1 で，他はどこでも 0 であるような列を $E_k = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ と書く．すると，容易にわかるように

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = \sum_{k \geq 0} a_k E_k \tag{3}$$

である．ここで，列に課した条件から，右辺は有限和になっている．そこで，積を

$$\left(\sum_{k \geq 0} a_k E_k\right) \left(\sum_{\ell \geq 0} b_\ell E_\ell\right) = \sum_{k, \ell \geq 0} a_k b_\ell E_{k+\ell} \tag{4}$$

と定義する（右辺の E_n の係数としては，$k + \ell = n$ となるような k と ℓ に対するすべての項を集めなければならない）．(4) から，E_0 が環の単位元であり，$E_k = E_1^k$ であることがわかる．$E_1 = x$ と置けば，列 (3) を $\sum a_k x^k$ の形に書くことができる．明らかに，列に対するこの表示は一意的である．積 (4) が可換環の公理を満たすことを確かめるのは易しく，したがって今構成した環は多項式環 $A[x]$ である．

多項式環 $A[x, y]$ は $A[x][y]$ とも，また上の構成の一般化としても定義される．同様にして，任意個数の変数の多項式環 $A[x_1, \ldots, x_n]$ が定義される．

例 3. 定数（実数）係数のすべての線形微分作用素は，作用素 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ に関する多項式として書くことができる．したがって，それらは環

$$\mathbb{R}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]$$

をなす．$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ を t_i に対応させることで，同型

$$\mathbb{R}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right] \cong \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_n]$$

が定義される.

$A=K$ が体ならば, 整数環 $\mathbb{Z}$ が有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分環であるのと同じように, 多項式環 $K[x]$ は有理関数体 $K(x)$ の部分環になる. 体の部分環であるような環は重要な性質を持っている. つまり, 関係式 $ab=0$ は, $a=0$ か $b=0$ のどちらかのときだけ成り立ち得るのである. 実際, 可換環の公理から, どんな a に対しても $a\cdot 0=0$ であることは容易にわかる. それで, 体で $ab=0$ であり $a\neq 0$ であれば, 左から a^{-1} を掛けることによって, $b=0$ となる. 明らかに, 体に含まれる環に対して同じことが成り立つ.

どんな元 a,b に対しても, 積 $ab=0$ が $a=0$ か $b=0$ のときだけ成り立ち, $0\neq 1$ であるという性質を持つ可換環は, **整環**または**整域**と呼ばれる. このように, どんな体の 0 でない部分環も整域である.

定理 I. どんな整域 A に対しても, A を部分環として持つ体 K で, K のあらゆる元が, $a,b\in A$, $b\neq 0$ に対して ab^{-1} という形に書くことができるようなものが存在する. この性質を持つ体 K は A の「商体」と呼ばれ, A によって (同型を除き) 一意的に定義される.

たとえば, $\mathbb{Z}$ の商体は $\mathbb{Q}$ であり, 多項式環 $K[x]$ の商体は有理関数体 $K(x)$ であり, $K[x_1,\ldots,x_n]$ の商体は $K(x_1,\ldots,x_n)$ である. 一般に, 商体は新しい体を作る効果的な方法を与えている.

例 4. A と B が 2 つの環のとき, その**直和**とは, $a\in A$ と $b\in B$ の対 (a,b) からなる環で, 加法と乗法が

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2,b_1+b_2),$$
$$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2,b_1b_2)$$

で与えられるものである. 直和は $A\oplus B$ と書かれる. 任意個の環の直和も同様に定義される.

直和は整域ではない. 実際, $(a,0)(0,b)=(0,0)$ は $A\oplus B$ の零元である.

最も重要なタイプの可換環の例は関数環によって与えられるが, それは整域でない環を含んでいる. きちんと言うなら, A の n 個のコピーの直和

$A \oplus \cdots \oplus A$ は，n 個の元からなる集合（たとえば $\{1, 2, \ldots, n\}$）上の，A に値を持つ関数の環と見ることができる．元 $(a_1, \ldots, a_n) \in A \oplus \cdots \oplus A$ は，$f(i) = a_i$ で与えられる関数 f と同一視することができる．関数の加法と乗法は，通常通り，その値での演算によって与えられる．

例 5. 区間 $[0, 1]$ 上の（実数値にしておくが）連続関数の全体は，通常の関数の加法と乗法によって，可換環 $\mathcal{C}$ をなす．これは整域ではない．実際，f と g を図 8 と図 9 に描いた関数とすると，明らかに $fg = 0$ である．定義において，実数値関数を複素数値関数で置き換えることができ，区間を任意の位相空間に置き換えることができる．解析学に現われるこのような環は，通常，環の元の集合だけでなく，その上の位相なり，位相を定めるノルムを一緒に考える．たとえば，この場合には

$$\|f\| = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)|$$

というノルムを考えるのが普通である．

図 8 や 9 の関数に類似の例を，この区間上の C^∞ 関数の環でも構成することができる．

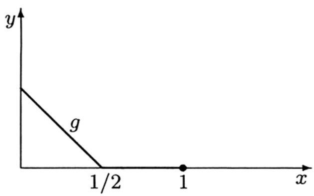


図 8

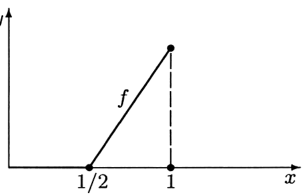


図 9

例 6. 原点で正則な 1 複素変数関数[2]の環は整域で，その商体はローラン級数体（§2 例 5 参照）である．§2 例 5 のように，係数 a_n を任意の体 K に持つ形式的ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ の環を定義することができる．これはまた，列

[2] ［訳註］日本語では 1 変数複素関数ということが普通だが,「複素」が変数と値の双方を形容しているのか，一方だけを形容しているのかは文脈によらなければ決まらない．

$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ がある点から先で 0 であるという条件を外せば，例 2 のようにして構成することもできる．これもまた整域で，その商体は**形式的ローラン級数体** $K((t))$ である．形式的ベキ級数環は $K[[t]]$ と書かれる．

例 7. 原点で正則な n 複素変数関数，つまり，原点のある近傍で収束するベキ級数

$$\sum a_{i_1 \ldots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$$

として表わすことのできる関数の環 $\mathcal{O}_n$．例 6 と同じように，複素係数の**形式的ベキ級数環** $\mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ や，任意の体 K に係数を持つ $K[[z_1, \ldots, z_n]]$ を定義することができる．

例 8. 方程式 $F(x, y) = 0$ によって定義される平面曲線 C に戻ろう．ここで，F は，§2 で考察したように，体 K に係数を持つ多項式とする．多項式 $P(x, y)$ それぞれに，P を曲線 C に制限することにより，C の点の集合上の関数を対応させる．このような関数は**曲線 C 上の多項式関数**と呼ばれる．明らかに，これらは可換環をなし，それを $K[C]$ と書く．F が多項式の積のときは，環 $K[C]$ は整域でないかも知れない．たとえば，$F = xy$ であれば，C は座標軸の和集合である．すると，x は y 軸上で 0 であり，y は x 軸上で 0 であるので，その積は曲線 C 全体で 0 になる．しかしながら，F が既約多項式であれば，$K[C]$ は整域になる．この場合，$K[C]$ の商体は C の有理関数体 $K(C)$ である．環 $K[C]$ を C の**座標環**と言う．

代数曲線 C に環 $K[C]$ を対応させることも「座標化」の例であり，実際，$K(C)$ を対応させるより精密なものである．というのは，$K[C]$ は $K(C)$ を（商体として）定めるが，体 $K(C)$ と $K(C')$ が同型でも，$K[C]$ と $K[C']$ が同型でないような曲線 C と C' が存在する．

$F(x, y) = 0$ で与えられる代数曲線の代わりに，$F(x, y, z) = 0$ で与えられる代数曲面や，さらに一般に代数多様体を考えることができるのは言うまでもない．

例 9. 任意の集合 M と，2 元からなる有限体 $\mathbb{F}_2$（§2 例 1 参照）に値を持つ，M 上の関数全体の作る可換環 A を考えよう．つまり，A は，M から

$\mathbb{F}_2$ へのすべての写像からなっている．$\mathbb{F}_2$ は 0 と 1 の 2 つの元だけからなるので，$\mathbb{F}_2$ に値を持つ関数は，値 1 をとる元のなす部分集合 $U \subset M$ によって一意的に定まる（残りでは値 0 をとる）．逆に，どんな部分集合 $U \subset M$ も，$m \in U$ なら $\varphi_U(m) = 1$ であり，$m \notin U$ なら $\varphi_U(m) = 0$ であるとして，関数 φ_U を定める．部分集合に対するどんな演算が，関数の和と積に対応するかを見ることは易しい．つまり，

$$\varphi_U \cdot \varphi_V = \varphi_{U \cap V}, \qquad \varphi_U + \varphi_V = \varphi_{U \Delta V}$$

となる．ここで，$U \Delta V$ は対称差 $U \Delta V = (U \cup V) \setminus (U \cap V)$ である．こうしてこの関数環は，対称差と共通部分をとるという演算を和と積とするような，部分集合 $U \subset M$ を元とするある集合として記述することもできる．この環はブールによって，論理学において，主張を形式的に記述するために導入された．$\mathbb{F}_2$ のあらゆる元に対して $x^2 = x$ となるから，この関係は $\mathbb{F}_2$ に値を持つどんな関数に対しても成り立ち，環 A においても成り立つ．あらゆる元 x が $x^2 = x$ を満たすような環を，**ブール環**と言う．

ブール環のもっと一般な例が，M のすべての部分集合ではなくて，部分集合 U と V とを含めば $U \cap V$ と $U \cup V$ も含み，U を含めばその補集合も含むような，ある部分集合族 S をとるだけで，全く同様に構成することができる．たとえば，あらゆる開集合が閉でもあるという性質を持つ位相空間 M を考え（このような空間を **0 次元**であると言う），S を M の開集合全体の集合とする．このようにしてあらゆるブール環が得られることが証明される．次の §4 で，この証明の基礎になる原理を示す．

体から可換環に移行することによって，可除性の理論が自明でないという，質的に新しい現象が生まれる．環 A の元 a が元 b によって**割り切ることができる**と言うのは，$a = bc$ となるような A の元 c が存在するときである．体とはまさに，可除性の理論が自明な環のことである．つまり，任意の元は 0 でない任意の元で割り切ることができる（$a = b(ab^{-1})$ より）．可除性の理論の古典的な例は環 $\mathbb{Z}$ での可除性の理論であり，すでに古代において構成されている．この理論の基本定理は，どんな整数も素因数の積に一意的に分解することができるという事実である．この定理の証明は，よく知られている

ように，余りつきの割算[3]（またはユークリッドの互除法）に基づいている．

A を任意の整域とする．A の元 a は，A の中に逆元を持つとき，A の**可逆元**または**単元**と言われる．($\mathbb{Z}$ では，単元[4]は ± 1 であり，$K[x]$ では 0 でない定数 $c \in K$ であり，$K[[x]]$ では，$a_0 \neq 0$ を満たす級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ である．) A のどんな元も単元で割ることができる．元 a が**素元**であるとは，a の分解が，単元 c に対する $a = c(c^{-1}a)$ の形のものだけであるときに言う．もし整域 A が，0 でない任意の元が素元の積に書かれ，素元の順序と単元を掛けることを除いてこの分解が一意的であるという性質を持つなら，A を**素元分解環**[5]と言う．こうして，$\mathbb{Z}$ は素元分解環であり，$K[x]$ も素元分解環である（証明は多項式に対する余りつきの割算を用いる）．A が素元分解環ならば，$A[x]$ も素元分解環であることが証明できる．したがって $A[x_1, \ldots, x_n]$ も素元分解環である．多項式環の素元が**既約多項式**と呼ばれるものである．$\mathbb{C}[x]$ では 1 次多項式だけが既約であり，$\mathbb{R}[x]$ では 1 次多項式と，実根を持たない 2 次多項式だけが既約である．環 $\mathbb{Q}[x]$ には任意次数の既約多項式が存在する．たとえば，どんな素数 p に対しても多項式 $x^n - p$ は既約である[6]．

素元分解環の重要な例は，原点で正則な n 複素変数関数の環 $\mathcal{O}_n$ であり，形式的ベキ級数環 $K[[t_1, \ldots, t_n]]$（例 7）である．これらが素元分解環であることの証明は「ワイエルシュトラスの予備定理」に基づいていて，この定理によって問題は，変数の 1 つに関する多項式である関数（または形式的ベキ級数）に帰着される．それから（A が素元分解環のとき）$A[t]$ が素元分解環であるという事実と帰納法を使う．

例 10.　ガウス整数．m と n が整数であるような $m + ni$ の形の複素数が環をなすことを示すことはやさしい．これが素元分解環であることは，余り

3　[訳註] 整数での割算という言い方をすることも多い．

4　[訳註] この場合は単数と言うことがあり，以下に出てくる素元は素数にあたる．

5　[訳註] これに対する訳語も**一意分解整域**，**素元分解整域**などがある．このように性質が追加されているときに，整域であっても環と呼ぶことがある．今の場合は，フランスやロシアで用いられる術語が factorial ring（英語に逐語訳すればということ）と呼ぶからで，整域性よりも factor される（割ることができる）という性質を重視しているということでもあり，歴史的にその性質が注目されることが早かったからでもある．他の性質にもこのような場合があるので注意すること．また英語やドイツ語では unique factorization domain（に逐語訳すればなるもの）の方が用いられ，しかもその頭文字だけの省略語 UFD が使われることも多い．

6　[訳註] もちろん，素数 p に対して $\sqrt[n]{p}$ が無理数だからである．

つきの割算を使って証明することができるが，このとき余りをとるときに減少していく量は m^2+n^2 である．この環では

$$m^2+n^2=(m+ni)(m-ni)$$

であり，整数を 2 つの平方数の和に表わすという整数論の問題の解決は，この環での可除性の理論に基づいている．

例 11. ε を方程式 $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ の（複素）根とする．m と n を整数とする，$m+n\varepsilon$ の形の複素数もまた環をなし，これもまた素元分解環である．この環では，m^3+n^3 という表示は

$$m^3+n^3=(m+n)(m+n\varepsilon)(m+n\bar{\varepsilon})$$

と分解される．ここで，$\bar{\varepsilon}=\varepsilon^2=-(1+\varepsilon)$ は ε の複素共役である．この等式のおかげで，この環での可除性の理論が「3 乗に関するフェルマーの最終定理」の証明の基礎となっている．18 世紀の数学者であるラグランジュとオイラーは，整数論（環 $\mathbb{Z}$ の理論）の定理の証明が他の数（他の環の元）を導入することに基づくことがあるという事実に，大変驚いている．

例 12. 素元分解環でない整域の例を与えよう．それは，$m+n\sqrt{-5}$ $(m,n\in\mathbb{Z})$ の形をしたすべての複素数からなる環である．

$$3^2=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$$

は 2 つの異なる素因数分解の例になっている．これには，3, $2+\sqrt{-5}$, $2-\sqrt{-5}$ が素数であることを確かめればよい．このために，α の絶対値の 2 乗を $N(\alpha)$ と書く．$\alpha=n+m\sqrt{-5}$ ならば， $N(\alpha)=(n+m\sqrt{-5})(n-m\sqrt{-5})=n^2+5m^2$ は正の整数である．さらに，絶対値の性質から $N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$ となる．まず $2+\sqrt{-5}$ が可約ならば，たとえば，$2+\sqrt{-5}=\alpha\beta$ なら，$N(2+\sqrt{-5})=N(\alpha)N(\beta)$ となる．しかし，$N(2+\sqrt{-5})=9$ なので，$(N(\alpha),N(\beta))=(3,3)$ または $(9,1)$ または $(1,9)$ という 3 つの可能性しかあり得ない．第 1 の場合はあり得ない．なぜなら，3 は n,m を整数として n^2+5m^2 の形に書くことができないからである．第 2 の場合は $\beta=\pm1$ であり，第 3 の場合は $\alpha=\pm1$ であるから，α か β が単数である．これで

$2+\sqrt{-5}$ が素数であることが証明される.

環が素元分解環でないということは，面白い可除性の理論がないということを意味するわけではない．その逆に，この場合には可除性の理論は特に自明でないものになる．これについては，次の §4 でもう少し詳しく述べることにしよう.

§4. 準同型とイデアル

一般の可換環と体とのもう1つの原理的な相違は，自明でない準同型の存在にある．環 A から環 B への準同型とは，

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2), \quad f(a_1 a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2), \quad f(1_A) = 1_B$$

を満たす写像 $f: A \to B$ のことである（A と B の単位元をそれぞれ 1_A と 1_B と書いている）[1]．同型とは逆写像を持つ準同型のことである．

環が位相を持つなら，通常興味があるのは連続な準同型だけである．

環 A と B を集合 X と Y の上の関数（たとえば，連続関数，微分可能関数，解析関数とか，代数曲線 C 上の多項式関数）の環として実現すると，準同型の典型的な例が得られる．写像 $\varphi: Y \to X$ は X 上の関数 F を，条件

$$(\varphi^* F)(y) = F(\varphi(y))$$

によって定義される Y 上の関数 $\varphi^* F$ に写す．考察している理論に対して自然な条件を φ が満たせば（つまり，φ が連続な，微分可能な，解析的な，または多項式で与えられた写像であれば），φ^* は A から B への準同型を定める．一番簡単な場合は，φ が埋め込み，つまり Y が X の部分集合の場合である．そのとき，φ^* は単に X 上で定義された関数の Y への制限である．

例 1. 曲線 C が方程式 $F(x, y) = 0$ で定義され，$F \in K[x, y]$ が既約多項式なら，C への制限は準同型 $K[x, y] \to K[C]$ を定める．

もっともよく起こるのは，Y が集合 X の1点，つまり，$Y = \{x_0\}$, $x_0 \in X$

---

1 ［訳註］環準同型の定義で注意しなければならないのは $f(1_A) = 1_B$ という条件で，このことにより零写像は環準同型にならない．しかし，零写像も準同型と考える方がよいことも起こるのだが，それは §5 で述べる加群としての準同型と考えることで対処するのが，現在は標準的である．これは混乱しやすいことで，論文や教科書でも時々見かけるし，本書の中でも著者自身混乱している場合も見受けられる．

であるときである．そのときは，任意の関数に対し，x_0 での値をとるということになる．

例 2. $x_0 \in C$ ならば，$K[C]$ の各関数を点 x_0 での値に対応させると，準同型 $K[C] \to K$ が定まる．

例 3. $\mathcal{C}$ が $[0,1]$ 上の連続関数環で，$x_0 \in [0,1]$ であれば，関数 $\varphi \in \mathcal{C}$ からその値 $\varphi(x_0)$ への対応は準同型 $\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ である．A が 0 の近傍で正則な関数の環であれば，$\varphi \in A$ をその値 $\varphi(0)$ に移すことは準同型 $A \to \mathbb{C}$ になる．

関数の 1 点での値をとることが準同型であるという説明から，環論の一般的な観点に導かれる．つまり，可換環がある集合上の関数環であると説明されることは非常によくあることで，その集合の「点」は，もとの環から体への準同型に対応するものである．元々の例は C が代数多様体のときの環 $K[C]$ であって，その環からより一般な環に幾何的直観が広がっていく．こうして，「あらゆる幾何的対象は，その上のある関数環によって座標化することができる」という概念は，もう 1 つの「どんな環もある幾何的対象を座標化する」という概念で補完される．

すでに §3 の多項式環の定義において，代数的と関数的というこの 2 つの観点に出合っている．両者の関係は，これ以降，段々と深く明確になっていく．

例 4. 円板 $|z| < 1$ で正則で，$|z| \leq 1$ で連続な関数の環 A を考えよう．上と同じように，点 z_0, $|z_0| \leq 1$ は，関数 $\varphi \in A$ を $\varphi(z_0)$ に対応させることによって準同型 $A \to \mathbb{C}$ を定義する．0 でない[2]すべての $\mathbb{C}$ 上の準同型 $A \to \mathbb{C}$ がこのようにして与えられることを示すことができる．A の関数の境界値を考えよう．これらは円周 $|z| = 1$ 上の連続関数であって，その負の指数のフーリエ係数はすべて 0 になっている．つまり，$\displaystyle\sum_{n \geq 0} c_n e^{2\pi i n \varphi}$ という形のフーリエ展開を持つ関数である．関数 $f \in A$ はその境界値で決まってしまうから，A は，円周上の連続関数で上のタイプのフーリエ展開を持つ連続関数の環と同型である．しかし，この説明で，境界円周 $|z| = 1$ の点に対応

2 ［訳註］「0 でない」という形容は（本書の定義の）環準同型に対しては本来不要であるが，強調したかったのだろう．

する A の準同型を，直かに見ることができるようになる．こうして，すべての準同型の集合を考えることによって，環の元をその集合上の関数と考えるべき自然な集合を再構成する助けになることがある．

$|z| \leq 1$ で正則で有界な関数の環では，すべての準同型が，$|z_0| < 1$ の点 z_0 で記述される，ということにはならない．その研究は，解析関数論の微妙な問題に関係している．

ブール環（§3 例 9 参照）に対しては，容易にわかるように，体 F への準同型 $\varphi : A \to F$ の像が 2 つの元からなる体になる．したがって，逆に，どんな元 $a \in A$ も準同型 φ を元 $\varphi(a) \in \mathbb{F}_2$ に対応させる．これが,「M として準同型 $A \to \mathbb{F}_2$ 全体の集合をとると，A は $\mathbb{F}_2$ に値を持つ M 上の関数環であると説明される」という，ブール環の主定理の証明のアイデアである．

例 5. $\mathcal{K}$ を n 複素変数の空間 $\mathbb{C}^n$ のコンパクトな部分集合で，A を，$\mathcal{K}$ 上の多項式の一様収束極限であるような関数の環とする．$\mathbb{C}$ 上の準同型 $A \to \mathbb{C}$ は，点 $z \in \mathcal{K}$ に対応するものでは尽くされない．それらは，$\mathcal{K}$ の**多項式凸包**と呼ばれる集合の点，つまり，あらゆる多項式 f に対して

$$|f(z)| \leq \sup_{\mathcal{K}} |f|$$

を満たすような点 $z \in \mathbb{C}^n$ と，1 対 1 対応にある．

例 6. 整数に対して，偶数ならば $\mathbb{0}$ を，奇数ならば $\mathbb{1}$ を対応させる．整数環から 2 元の体 $\mathbb{F}_2$ への準同型 $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$ が得られる（$\mathbb{F}_2$ の加算表と乗算表は §1 の図 3 と図 4 で与えてある）．言うならば，$\mathbb{0}$ と $\mathbb{1}$ に関する演算は，この写像が準同型になるように定義されたのである．

$f : A \to B$ を可換環の準同型としよう．元 $f(a)$ $(a \in A)$ の集合は B の部分環をなす．これは準同型の定義からわかる．これを f の**像**と呼び，$\mathrm{Im}\, f$ とか $f(A)$ と書く．$f(a) = 0$ を満たす元 $a \in A$ の集合を f の**核**と呼び，$\mathrm{Ker}\, f$ と書く．$B = \mathrm{Im}\, f$ のとき，B を A の**準同型像**と言う．

$\mathrm{Ker}\, f = 0$ であれば，f は A から B の部分環 $f(A)$ への同型である．というのは，$f(a) = f(b)$ であれば，準同型の定義により $f(a - b) = 0$，つま

り，$a-b \in \operatorname{Ker} f = 0$ であり，$a=b$ となる．こうして f は A から $f(A)$ への 1 対 1 対応であり，したがって同型である．こうした事情で，準同型の核に注意が向けられることになる．

定義から直ちに，$a_1, a_2 \in \operatorname{Ker} f$ なら $a_1 + a_2 \in \operatorname{Ker} f$ であり，また $a \in \operatorname{Ker} f$ ならば，どんな $x \in A$ に対しても $ax \in \operatorname{Ker} f$ となることがわかる．

環 A の空でない部分集合 I がこの 2 つの性質，つまり，

$$a_1, a_2 \in I \ \Rightarrow \ a_1 + a_2 \in I \quad \text{かつ} \quad a \in I \ \Rightarrow \ ax \in I \ (\text{任意の } x \in A)$$

を満たすとき，**イデアル**と言う．

こうして，どんな準同型の核もイデアルである．イデアルを構成する普遍的な方法は次の通りである．A の元の任意の集合 $\{a_\lambda\}$ に対して，$\sum a_\lambda x_\lambda$, $x_\lambda \in A$ の形に表わすことのできる元（この和には 0 でない項は有限個しかないと仮定している）の集合 I を考える．すると I はイデアルであり，**集合 $\{a_\lambda\}$ で生成されたイデアル**と言われる．多くの場合，集合 $\{a_\lambda\}$ は有限である．1 つの元から生成されたイデアル $I=(a)$ を**主イデアル**と言う．a が b を割れば，$(b) \subset (a)$ である．

体 K のイデアルは (0) と $(1)=K$ の 2 つだけである．というのは，$I \subset K$ が K のイデアルであり，$0 \neq a \in K$ であれば，任意の元 $b \in K$ に対して $I \ni aa^{-1}b = b$ となるから $I=K$ である（これは，体では可除性の理論が自明であるということを言い換えたものになっている）．このことから，体からの 0 でないどんな準同型 $K \to B$ も，環 B のある部分体との同型になることがわかる[3]．

逆に，もし可換環 A が (0) と (1) 以外のイデアルを持たず，$0 \neq 1$ であれば，A は体である．実際，どんな元 $a \neq 0$ に対しても $(a)=A$ となるので，特に $1 \in (a)$ となり，ある元 $b \in A$ に対して $1=ab$ となり，a が逆元を持つことになる．

整数環 $\mathbb{Z}$ においてはどんなイデアルも，主イデアルである．$I \neq (0)$ であれば，I に含まれる最小の正数 n に対して $I=(n)$ となることは容易にわか

---

[3] ［訳註］$\varphi(1_K) = 1_B \neq 0_B$ であり，φ の像は 1_B と $0_B (\neq 0_B)$ を含んでいる．$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ も容易に得られる．「0 でない」という形容については前の訳註と同じ．

る．同じことが環 $K[x]$ に対しても言える．ここではどんなイデアル I も，I に含まれる最小次数の多項式 $f(x)$ に対して $I=(f(x))$ の形をしている．環 $K[x,y]$ では，定数項を持たない多項式のなすイデアル I が，$I=(x,y)$ の形をしていて，主イデアルでないことが容易にわかる．あらゆるイデアルが主イデアルであるような環を**主イデアル環**[4]と言う．

$m+ni$ $(m,n\in\mathbb{Z})$ の形の複素数の作る環（§3 例 10 参照）や，$m+n\varepsilon$ $(\varepsilon^2+\varepsilon+1=0)$ の形の複素数の作る環（§3 例 11 参照）は主イデアル整域である．環 $\mathbb{Z}$ や $K[x]$ とこれらの環が主イデアル整域であることは，それらの一般的な性質に関係している．

例 7. 環 A が**ユークリッド環**（または，ユークリッドの互除法を持つ環）と呼ばれるのは，A が整域で，A の各元 a に何かしらの非負整数 $\nu(a)$ が対応し，すべての $a,b\in A$ $(b\neq 0)$ に対し，$a=bc+d$ で，$\nu(d)<\nu(b)$ か $d=0$ が成り立つような $c,d\in A$ が存在し，その上，$\nu(a)=0$ と $a=0$ とが必要十分であるときである．特に，$A=\mathbb{Z}$ に対しては $\nu(a)=|a|$ であり，$A=K[x]$ に対しては，$f(x)\neq 0$ のときは多項式 f の次数が $|f(x)|$ であり，また $|0|=0$ である．また，§13 例 10 と 11 の環に対しては，$\nu(a)=|a|^2$ である．あらゆるユークリッド環 A は主イデアル環であり，その証明は $A=\mathbb{Z}$ や $A=K[x]$ の場合とほとんど同じである．

環 $\mathbb{Z}$ や $K[x]$ が素元分解環であるのは偶然ではなく，任意の主イデアル環が素元分解環であることを証明することができる．しかし，環 $K[x,y]$ の例は，主イデアル環より素元分解環の方が沢山あることを示している．まったく同じように，原点で正則な $n(>1)$ 複素変数の関数環 $\mathcal{O}_n$（§3 例 7 参照）は，素元分解環だが主イデアル環ではない．この環におけるイデアルの研究は，原点の近傍で方程式

$$f_1=0,\dots,f_m=0 \qquad (f_i\in\mathcal{O}_n)$$

[4] ［訳註］**単項イデアル環**という用語もよく使われている．また，整域の場合は**主イデアル整域**とか**単項イデアル整域**とか呼ばれ，特に英語文献では主イデアル整域の英語である principal ideal domain の頭文字を並べて PID とする省略形が使われることが多い．しかし，ブルバキの日本語訳 [118] での**主環**が主イデアル整域のことであるように，歴史的な事情により，「環」という名称を持っている場合にも，実際には「整域」であることが仮定されている場合も多いので，類書を読むときには注意が必要である．

によって定義される**局所解析多様体**の研究では重要な役割を果たす．このような多様体を既約多様体の和として表わすとか，その次元の概念などは，これらイデアルの性質に基づいている．

例 8. 区間上の連続関数の環 $\mathcal{C}$ では，関数 φ に x_0 での値 $\varphi(x_0)$ を対応させる準同型の核は $I_{x_0} = \{\varphi \in \mathcal{C} \mid \varphi(x_0) = 0\}$ である．これが主イデアルでないことは容易にわかる．それは，$x \to x_0$ につれて与えられた関数 $\varphi(x)$ よりもかなり遅く 0 に近づく関数（たとえば，$\sqrt{|\varphi(x)|}$ ）はイデアル $(\varphi(x))$ に含まれないからである．同様にして，I_{x_0} はそれに属する有限個の $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ によっては生成されないことが証明される．

直線上の原点における C^∞ **関数の芽の環** $\mathcal{E}$ で，同様のタイプのもう 1 つの例が得られる.（定義により，2 つの関数は，0 のある近傍で等しいとき，0 で同じ芽を定める.）0 で階数 $\leq n$ のすべての導関数をこめて 0 になる関数の芽全体のイデアル M_n は主イデアルで，(x^{n+1}) となるが,（e^{-1/x^2} のような）0 ですべての導関数が 0 となる関数の芽全体のイデアル M_∞ は，どんな有限の関数系によっても生成されないことを証明することができる．ともかく，これらの例の意味合いを過大に考えてはいけない．連続関数環 $\mathcal{C}$ の場合は，位相を使って，関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ で**位相的に生成された**イデアル，つまり，イデアル $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ の閉包を考えるのが自然である．この位相的な意味では，$\mathcal{C}$ のどんなイデアルも 1 つの関数で生成される．$\mathcal{E}$ に対して同様な考察をすると，位相の定義はずっと複雑になるが，たとえば，イデアル M_∞ がどんな有限の関数系でも生成されないという事実は，ずっと実質的な情報になっている．

I と J を環 A の 2 つのイデアルとする．すべての積 ij $(i \in I,\ j \in J)$ の集合で生成されるイデアルは，**イデアル** I **と** J **の積**と呼ばれ，IJ と書かれる．主イデアルの積は元（げん）の積と一致する．つまり，$I = (a)$，$J = (b)$ ならば $IJ = (ab)$ となる．元を一意的に素因子へ分解する問題のアナロジーとして，環のイデアルをそれ以上分解され得ないようなイデアルの積として分解するという問題を考えることができる．もちろん，これらの性質はともに，主イデアル整域では成り立っている．しかし，素元分解環ではないが，そこではイデアルが既約因子の積に一意的に分解するというような重要なタイプの環

が存在する．

例 9. 素元分解環でない環の例として与えた，$m+n\sqrt{-5}$ $(m,n\in\mathbb{Z})$ の形の数全体の環 A （§3 例 12 参照）を考えよう．§3 で与えた分解

$$3^2=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5}) \tag{1}$$

は，数を対応する主イデアルで置き換えると，素因子への分解になっていない．

$$(2+\sqrt{-5})=(2+\sqrt{-5},3)^2,\quad (2-\sqrt{-5})=(2-\sqrt{-5},3)^2$$

と

$$(3)=(2+\sqrt{-5},3)(2-\sqrt{-5},3)$$

であることを確かめるのは難しくないので，(1) は積 $(2+\sqrt{-5},3)^2(2-\sqrt{-5},3)^2$ を意味しており，2 つの異なった分解法になっている．同様な分解が可能であることが，代数的数の算術の基礎になっている．これが「イデアル」という用語の歴史的な説明である．(たとえば，3 とか $2+\sqrt{-5}$ のような）既約な数が分解されていく先の素イデアルは，最初「理想的な素因数」というように考えられたのである[5].

3 と $2+\sqrt{-5}$ は素数だから，±1 以外の共通因子を持たない．しかし，イデアル $(3,2+\sqrt{-5})$ はその最大公約数（もっと正確には，イデアル (3) と $(2+\sqrt{-5})$ の最大公約数）である．整数 a と b の最大公約数が $au+bv$ と表わすことができるという事実と同様に，イデアル $(3,2+\sqrt{-5})$ は $3\alpha+(2+\sqrt{-5})\beta$, $\alpha,\beta\in A$ という形の数全体である．

あらゆるイデアルはある準同型の核であるというように，準同型とイデアルの間が双方向の関係であるという事実のため，イデアルの概念は特に重要である．環 A のイデアル I から，この準同型で A が写像される B を構成するために，次の定義を導入する．

環 A の元 a_1 と a_2 は，$a_1-a_2\in I$ であるとき，A のイデアル I を法として**合同**である（または $\mathrm{mod}\,I$ で合同である）と言う．このことを

$$a_1\equiv a_2 \bmod I$$

5 ［訳註］イデアル＝ ideal ＝理想的な．

と書く．$A=\mathbb{Z}$ で $I=(n)$ の場合には，数論における古典的な合同の概念になっている．a_1 と a_2 は，n で割ったとき同じ余りを持つなら，$\bmod n$ で合同である[6].

イデアルを法とする合同は同値関係であり，$\bmod I$ で互いに合同な元の作る互いに交わらない類（クラス）の和集合として，A を分解する．これらの類を I を法とする**剰余類**とも呼ぶ[7].

Γ_1 と Γ_2 を $\bmod I$ の 2 つの剰余類とする．どのように元 $a_1 \in \Gamma_1$ と $a_2 \in \Gamma_2$ を選んでも a_1+a_2 が同じ剰余類 Γ に属すことが容易にわかる．この類を剰余類 Γ_1 と Γ_2 の**和**と呼ぶ．同様にして剰余類の**積**も定義される．イデアル I を法とする剰余類全体は，容易に確かめられるように，上のように演算を定義すると可換環になる．これを，環 A のイデアル I による**剰余類環**[8]または**商環**と言い，A/I と書く．

たとえば，$A=\mathbb{Z}$ で $I=(2)$ であれば，剰余類は丁度 2 つで，偶数と奇数であり，環 $\mathbb{Z}/(2)$ は体 $\mathbb{F}_2$ と一致する．

元 $a \in A$ に I を法とするその剰余類を対応させることが，I を核とする準同型 $f : A \to A/I$ になることは容易にわかる．これを**標準準同型**と言う．

環から商環への標準準同型によって，任意の準同型をより具体的に記述できるようになる．すなわち，次の主張が容易に確かめられる．

定理 I. どんな環準同型 $\varphi : A \to B$ に対しても，像の環 $\operatorname{Im}\varphi$ は商環 $A/\operatorname{Ker}\varphi$ と同型であり，その間の同型 σ は，標準準同型 $\psi : A \to A/\operatorname{Ker}\varphi$ と合成すると $\varphi : A \to \operatorname{Im}\varphi$ となるように選ばれる．

正確に言えば，この同型[9]σ は，任意の $a \in A$ に対して $\psi(a)$ を $\varphi(a)$ に写す（$\sigma(\psi(a)) \in \operatorname{Im}\varphi \subset B$ として定義されたのだったから，$\sigma(\psi(a))$ と $\varphi(a)$ がともに B に含まれることを思い出しておく必要がある）．この結果はなにより $B=\operatorname{Im}\varphi$ のときに用いられる．この場合，主張は次のようになる．

---

[6] ［訳註］この場合は，どちらかというと括弧をつけて，$a_1 \equiv a_2 \pmod n$ と書くことが多い．

[7] ［訳註］可換環の場合には合同類と呼ぶこともある．また「コセット」という呼び方も簡便で，使う人が多い．

[8] ［訳註］単に「剰余環」と言うこともある．

[9] ［訳註］この同型は $\sigma : A/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ という向きの写像で，以下のように定義されたものである．

定理 II. 準同型定理. 準同型像は，準同型の核を法とする商環と同型である.

標準準同型 f によって，任意のイデアル $J \subset A/I$ の逆像 $f^{-1}(J)$ は I を含む A のイデアルであり，I を含むどんなイデアル I' の像 $f(I')$ も A/I のイデアルである．これによって，商環 A/I のイデアルと，I を含む A のイデアルとの間に 1 対 1 対応が得られる．

特に，すでに知っているように，A/I が体であることと，(0) と (1) の丁度 2 つのイデアルを持つことが同値であり，またそれは，I を真に含む A 以外のイデアルが存在しないことを意味する．このような I を**極大イデアル**と言う．どんなイデアル $I \neq A$ も少なくとも 1 つの極大イデアルに含まれることを，(集合論のツォルンの補題を用いて) 証明することができる．

極大イデアルを法とする商環を考えることは（商体の構成とともに）体を構成する最も重要な方法である．これから，一連の新しい体の例を得るためにこれを使ってみよう．

例 10. 環 $\mathbb{Z}$ では，極大イデアルは，ある素数 p に対して (p) という形をしている．こうして，$\mathbb{Z}/(p)$ は体である．これは p 個の元を持ち，$\mathbb{F}_p$ と書かれる．これまでに，2 元と 3 元の体 $\mathbb{F}_2$ と $\mathbb{F}_3$ は構成してある．n が素数でなければ，環 $\mathbb{Z}/(n)$ は体ではなく，また容易にわかるように整域でさえない．

例 11. さて，多項式環 $K[x]$ を考えよう．その極大イデアルは，$\varphi(x)$ を既約多項式として，$(\varphi(x))$ の形をしている．この場合，商環 $L = K[x]/(\varphi(x))$ は体である．準同型

$$K[x] \to L = K[x]/(\varphi(x))$$

による変数 x の像を α と書こう．すると当たり前のことだが $\varphi(\alpha) = 0$ であり，多項式 $\varphi(x)$ は L の中に根を持つことになる．φ の次数を n とする．整式の割り算をすれば，任意の多項式 $u(x) \in K[x]$ は，一意的に

$$u(x) = \varphi(x)\psi(x) + v(x)$$

の形に表わすことができる．ここで，v は n より低次の多項式である．これから，L の任意の元は，一意的に

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \tag{2}$$

の形に表わすことができることがわかる．ここで，$a_0, \ldots, a_{n-1}$ は体 K の任意の元である．

$K = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2 + 1$ とすれば，複素数体 $\mathbb{C}$ がこういう構成で得られる．このとき，i は x の $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ における像であり，$a+bi$ は $a+bx$ の像である．

上で，多項式 $\varphi(x)$ が与えられたとき，その根を含む拡大体 L/K が構成された．このプロセスを繰り返せば，任意の体 K に対して，どんな多項式 $\varphi \in \Sigma[t]$ も Σ に根を持つような拡大体 Σ/K が存在することが証明できる．この性質を持つ体を**代数的閉体**と言う．たとえば，$\mathbb{C}$ は代数的閉体である．

K を p 個の元からなる体とする．φ が K 上の n 次既約多項式であれば，表示 (2) によって，L が p^n 個の元を持つことがわかる．これらのアイデアに基づいて，すべての有限体を記述する次の定理が証明される．

有限体に関する定理．

1. **有限体の元の個数は** p^n **である**[10]**．**

2. **各** p **と** n **に対して，**$q = p^n$ **個の元を持つ体** $\mathbb{F}_q$ **が存在する．**

3. **元の数が同じ 2 つの有限体は同型である．**

有限体には非常に多くの応用がある．有限であるという事実を特に利用しているものに，誤り訂正コードの理論に関連したものがある．定義により，コードは，有限集合 E（「アルファベット」）と，あらゆる列 $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in E$ の全体 E^n の部分集合 U とからなるものである．この部分集合 U は，U のどんな 2 つの列も十分多くの場所で異なるように選ばれているべきである．すると,「メッセージ」 $(u_1, \ldots, u_n) \in U$ を送るとき，少し位 u_i が間違ったとしても，もとのメッセージを再構成することができる．E としてある有限体 $\mathbb{F}_q$ をとり，U としてベクトル空間 $\mathbb{F}_q^n$ の部分空間をとれば，そのような選択ができるほど豊富な素材が得られる．さらに，$\mathbb{F}_q^n$ として，体

10 ［訳註］当然，この p は素数を意味している．

$\mathbb{F}_q(t)$ とか，代数曲線 C に対する $\mathbb{F}_q(C)$ の有限次元部分空間をとり，U として（特定の零点や極を持つ関数からなるといった）ある幾何的な条件による部分空間を選ぶことによって，大きな成果が得られている．こうして，符号理論が有限体上の代数幾何の非常に微妙な問題に関連していることがわかってきた．

最も単純な環 $\mathbb{Z}/(n)$ を考えても，すでに面白い結果が得られる．K を単位元 1 を持つ任意の体とし，

$$f(n) = n \cdot 1, \quad \text{つまり} \quad f(n) = \begin{cases} 1 + \cdots + 1 \ (n \text{ 回}) & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(1 + \cdots + 1)\ (-n \text{ 回}) & n < 0 \end{cases}$$

と定義される $\mathbb{Z}$ から K への写像 f を考える．f が準同型であることは容易に確かめられる．$\operatorname{Ker} f = 0$ か $\operatorname{Ker} f \neq 0$ かの 2 つの場合が可能である．

第 1 の場合，$f(\mathbb{Z})$ は K の部分環で，$\mathbb{Z}$ と同型である．K は体だから，この環の元(げん)の比もまた含まねばならず，容易にわかるように，それらは部分体 $K_0 \subset K$ をなす．商体の一意性により，K_0 は体 $\mathbb{Q}$ に同型であり，つまり，K が $\mathbb{Q}$ と同型な部分体を含むことがわかる．

第 2 の場合，$\operatorname{Ker} f = (n)$ としよう．明らかに，n は素数でなければならない．そうでなければ，$f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(n)$ が整域でなくなるからである．しかし，そのとき $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(p) = \mathbb{F}_p$ は p 個の元からなる体である．

こうして，任意の体 K は有理数体 $\mathbb{Q}$ か，ある素数個の元からなる体 $\mathbb{F}_p$ を含むことがわかった．これらの体を**素体**と言い，任意の体はある素体の拡大体である．もし K が p 個の元からなる体を含めば，あらゆる $x \in K$ に対して $px = 0$ である．この場合，p は K の**標数**と呼ばれ，K を**有限標数**の体と言い，$\operatorname{char} K = p$ と書く．K が $\mathbb{Q}$ を含めば，$nx = 0$ となるのは $n = 0$ か $x = 0$ のときだけであり，この場合，K は**標数 0** を持つと言い，$\operatorname{char} K = 0$ と書く（または $\operatorname{char} K = \infty$ と書くこともある）．

体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}(x)$, $\mathbb{R}(x)$, $\mathbb{C}(x)$ の標数は 0 である．p 個の元を持つ体 $\mathbb{F}_p$ や $\mathbb{F}_p(x)$, $\mathbb{F}_p(x, y)$ などは標数 p である．

0 でない環 A/I が体に埋め込まれるのは，整域であることと同値である．これは，$I \neq A$ であり，$a, b \in A$, $ab \in I$ ならば，$a \in I$ か $b \in I$ であるこ

とを意味している．この条件を満たすものは**素イデアル**と呼ばれる．たとえば，F が既約多項式のとき，主イデアル

$$I = (F(x,y)) \subset K[x,y]$$

は，素イデアルである．C を方程式 $F(x,y)=0$ を持つ代数曲線とすれば，環 $K[x,y]/I = K[C]$ は体 $K(C)$ に埋め込まれる．素イデアルとは，体 K への準同型 $\varphi: A \to K$（ただし，$\varphi(A) \neq K$）の核であると言うこともできる．

例 9 の（因子の積に分解することができないという意味の）素イデアルは，今定義した意味での（0 と異なる）素イデアルと一致することを示すことができる．

この節の初めに，どんな環もある集合 X 上の関数空間と考えることができるという見方について論じた．この集合の「点」は，その環から体への準同型に対応している．それゆえ，それをその環の極大イデアル（素イデアルとすることもある）と解釈することができる．M が「点 $x \in X$ を特定する」イデアルであり，$a \in A$ であれば，a の x での「値」$a(x)$ は A/M での剰余類 $a+M$ である．このような幾何的な直観は初めのうちはかなり空想的なように見える．たとえば，$\mathbb{Z}$ では，極大イデアルは素数に対応し，各「点」(p) での値はその体 $\mathbb{F}_p$ の元になる．($1984 = 2^6 \times 31$ は，点 (2) と (31) で 0 になる，素数の集合上の関数と考えるべきであり，さらにこの関数の点 (2) での重複度は 6 で，(31) では 1 であると言うこともできる[11]．) しかしこれは，整数環 $\mathbb{Z}$ と多項式環 $K[t]$ との，素数 $p \in \mathbb{Z}$ が既約多項式 $P(t) \in K[t]$ と対応するようなアナロジーの論理的な拡張以上のものではない．アナロジーを続ければ，代数的数の定義方程式

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0 \qquad (a_i \in \mathbb{Z})$$

のアナロジーが，代数関数 $x(t)$ の定義方程式

$$a_0(t) + a_1(t)x + \cdots + a_n(t)x^n = 0 \qquad (a_i(t) \in K[t])$$

であると考えるべきである．実際，代数的数の研究で，代数関数論やそれに

11 ［訳註］「この例 (1984) は本書（ロシア語版）の出版年だという理由からで，ジョージ・オーウェルの小説とは何の関係もない」という訳註が英語版にはついている．

付随するリーマン面の理論の直観を適用できることがわかってきた．数論の最も美しい達成の幾つかは，この観点を系統的に展開したおかげなのである．

同じアイデアが別の形で，(たとえば，複素解析多様体の間の解析写像のような）写像 $\varphi: Y \to X$ を考える際に重要な役割を果たしている．A と B がそれぞれ X と Y 上の解析関数の環であれば，この節の初めに述べたように，写像 φ は準同型 $\varphi^*: A \to B$ を定める．$Z \subset X$ を部分多様体とし，$I \subset A$ を Z 上で 0 になる関数の作るイデアルとする．$I = (f_1, \ldots, f_r)$ であれば，このことは Z が方程式 $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$ で定義されることを意味する．部分多様体 Z の Y における逆像 $\varphi^{-1}(Z)$ は，方程式 $\varphi^* f_1 = 0, \ldots, \varphi^* f_r = 0$ で定義され，自然に環

$$B/(\varphi^* f_1, \ldots, \varphi^* f_r) = B/(\varphi^* I)B$$

に対応している．たとえば，φ を直線 Y から直線 X への $x = y^2$ で定義される写像とする．Z が点 $x = \alpha \neq 0$ であれば，$\varphi^{-1}(Z)$ は 2 点 $y = \pm\sqrt{\alpha}$ からなり，

$$B/(\varphi^* I)B \cong \mathbb{C}[y]/(y^2 - \alpha) \cong \mathbb{C}[y]/(y - \sqrt{\alpha}) \oplus \mathbb{C}[y]/(y + \sqrt{\alpha}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

は 1 対の点上の関数の環である．しかし，Z が点 $x = 0$ ならば，$\varphi^{-1}(Z)$ は 1 点 $y = 0$ であり，$B/(\varphi^* I)B \cong \mathbb{C}[y]/y^2$ となる．この環は $\alpha + \beta\varepsilon$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ の形の元からなり，ε は y の像で，$\varepsilon^2 = 0$ である．これは「1 つの 2 重点上の関数の環」と説明することができ，この点の集合論的な逆像そのものよりも，点 $x = 0$ の近傍での写像 $x = y^2$ の挙動についてずっと多くの厳密な情報を与えている．同様に，解析写像の特異点の研究の中で，これらの特異点の不変量として，ずっと複雑な可換環を考えるようになっている．

例 12. $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ を体の無限列とする．あらゆる無限列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $a_i \in K_i$ を考え，その上の演算を

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$$

と

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots)$$

によって定義する．こうして，体 K_i の積と呼ばれる可換環が得られ，$\prod K_i$ と書かれる．

環 $\prod K_i$ の体への準同型（つまり，その極大イデアル）の幾つかにはすぐに気がつくだろう．(n を固定して）列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ の n 番目の成分をとることは準同型である．しかしそれほどには自明でない準同型も存在する．実際，有限個の成分 a_i だけが 0 でないような列全体を考えると，これはイデアル I をなす．あらゆるイデアルは極大イデアルに含まれるので，$\mathfrak{M}$ を，I を含む $\prod K_i$ のある極大イデアルとする．これは上の自明な準同型の核とは違うものである．実際，これらは I を含んでいない．商環 $\prod K_i/\mathfrak{M}$ は体であり，体 K_i の**超積**と呼ばれる．体 K_i の興味ある「混合物」になっている．たとえば，すべての K_i が異なる有限標数を持つなら，その超積の標数は 0 である．これは有限標数の体から標数 0 の体への 1 つの移行方法であり，これによって証明が困難な幾つかの整数論の定理の証明が得られる．

もしすべての体 K_i が実数体 $\mathbb{R}$ と一致していれば，超積には解析学での応用がある．これは，いわゆる**超準解析**の基礎になっていて，たとえば，微分方程式論の幾つかの問題で，収束の評価や証明の困難さを回避することができるようになる．

数理論理学の観点から超積が興味深いのは，すべての体 K_i で真などんな「初等的な」主張も，その超積において真になるという点にある．

例 13. $f_i(z)$ をローラン級数，収束級数，形式的ベキ級数のいずれかとして，微分作用素

$$\mathcal{D} = \sum_{i=0}^{k} f_i(z) \frac{d^i}{dz^i}$$

を考える．このような作用素の積は必ずしも可換ではない．しかし，それでもある作用素 $\mathcal{D}$ と Δ の対に対しては，たとえば，

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dz^2} - 2z^{-2} \quad と \quad \Delta = \frac{d^3}{dz^3} - 3z^{-2}\frac{d}{dz} + 3z^{-3}$$

に対しては，$\mathcal{D}\Delta = \Delta\mathcal{D}$ となることも起こり得る．そのとき，$\mathcal{D}$ と Δ の定数係数の多項式 $P(\mathcal{D}, \Delta)$ の全体は可換環になり，これを $R_{\mathcal{D},\Delta}$ と書く．するとまったく予期しないことが起こる．$\mathcal{D}\Delta = \Delta\mathcal{D}$ であれば，$F(\mathcal{D}, \Delta) = 0$

となるような定数係数の 0 でない多項式 $F(x, y) = 0$ が存在する，つまり，$\mathcal{D}$ と Δ がある多項式関係式を満たすのである．たとえば，

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dz^2} - 2z^{-2} \quad と \quad \Delta = \frac{d^3}{dz^3} - 3z^{-2}\frac{d}{dz} + 3z^{-3}$$

であれば，$F = \mathcal{D}^3 - \Delta^2$ となる．この際，F が既約であると考えることができる．そのとき環 $R_{\mathcal{D},\Delta}$ は

$$\mathbb{C}[x, y]/(F(x, y))$$

と同型，言い換えれば，方程式 $F(x, y) = 0$ を持つ既約な曲線 C に対する，環 $\mathbb{C}[C]$ と同型である．もし，作用素 $\mathcal{D}$ と Δ が共通の固有関数 f を持てば，この関数は環 $R_{\mathcal{D},\Delta}$ のすべての作用素に対しても固有関数になっている．各作用素を固有関数 f の固有値に対応させるのは，準同型 $R_{\mathcal{D},\Delta} \to \mathbb{C}$ になる．同型 $R_{\mathcal{D},\Delta} \cong \mathbb{C}[C]$ だったのだから，この準同型は曲線 C の点を定める．この曲線のあらゆる点が，作用素 $\mathcal{D}$ と Δ の同時固有関数に対応することを示すことができる．今述べた可換な微分作用素と代数曲線との関係によって，最近，可換な作用素環の構造の解明が著しく進展した．

§5.　加群

空間のある領域 V とその上に定義されたベクトル場を考える．ベクトル場に対する加法とスカラー倍の演算は，各点に置かれたベクトルに施すことによって得られる．こうしてすべてのベクトル場は（無限次元）ベクトル空間をなす．さらに，V 上の関数を掛けることも可能である．この演算は非常に役に立つ．というのは，あらゆるベクトル場を，関数 A, B, C を使って，

$$A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial z}$$

と書くことができるからである．それゆえ，ベクトル場の集合は関数の環上では，3 次元であると考えるのが自然である．こうして環（この節では可換環だけを扱っている）上の**加群**の概念に到達した．これがベクトル空間と違う点は，ベクトル空間に対してはその元と掛けられるのは体の元であるのに，加群に対しては環の元であることだけである．元の加法とか，環の元を掛けることに対する残りの公理は，前とまったく同じなので，繰り返すことはしない．

例 1. 環はそれ自身の上の加群である．これは 1 次元ベクトル空間のアナロジーである．

例 2. （微分可能，実解析的，複素解析的な）多様体上の与えられた次数の微分形式は，多様体上の（微分可能，実解析的，複素解析的な）関数の環上の加群である．ベクトル場に対しても，またまったく一般に，固定した型のテンソル場に対しても同じことが成り立つ.（これらすべての概念の定義は，§5 の後半と §7 で述べることにする.）

例 3. φ が体 K 上のベクトル空間 L の線形変換ならば，

$$f(t)x = (f(\varphi))(x) \qquad (f(t) \in K[t],\ x \in L)$$

と置くことによって，L を $K[t]$ 上の加群とすることができる．

例 4. 定数係数の線形微分作用素の環（§3 例 3 参照）は，（C^∞ な，台がコンパクトな，指数関数的に減少する，多項式であるなどの性質を持つ）関数の空間に作用し，これらの空間をこの環上の加群とする．この環は多項式環 $\mathbb{R}[t_1,\dots,t_n]$ と同型なので（§3 例 3 参照），上のそれぞれの空間は多項式環上の加群である．もちろん，体 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ で置き換えても同じことが成り立つ．

例 5. M と N を環 A 上の加群とする．対

$$(m,n) \qquad (m\in M,\ n\in N)$$

からなる加群で，加法と，A の元との積が

$$(m,n)+(m_1,n_1)=(m+m_1,n+n_1) \quad と \quad a(m,n)=(am,an)$$

によって与えられるものを考える．この加群を M と N の**直和**と呼び，$M\oplus N$ と書く．任意個数の加群の直和も同じように定義できる．加群 A（例 1）の n 個のコピーの直和を A^n と書き，**ランク n の自由加群**と言う．これは，n 次元ベクトル空間の最も直接的な一般化である．A^n の元は

$$m=(a_1,\dots,a_n), \qquad a_i\in A$$

の形の n 組である．$e_i=(0,\dots,1,\dots,0)$ を i 番目だけに 1 があるものとすると，$m=\sum a_ie_i$ となり，この表示は一意的である．

時には，無限次元ベクトル空間の代数的なアナロジーを考えることが役に立つことがある．それは A に同型な加群の族 Σ の直和であって，その直和の元は「$a_\sigma\in A$ であり，σ が Σ を走り，有限個の $\sigma\in\Sigma$ に対してだけ $a_\sigma\neq 0$ である」という性質を満たす列 $\{a_\sigma\}$ である．元 e_σ を前と同様に定義すれば，直和のあらゆる元は有限和 $\sum a_\sigma e_\sigma$ によって一意的に表わされる．構成したこの加群を**自由加群**，$\{e_\sigma\}$ をその基底または**自由生成系**と言う．

例 6. 環 $\mathbb{Z}$ 上の加群 M では，和が定義されているなら，数 $n\in\mathbb{Z}$ を掛けることはすでに定まっている．つまり，

$$n>0 \text{ ならば } nx=x+\cdots+x \quad (n\text{ 回})$$

であるし，$n=-m$ $(m>0)$ ならば $nx=-(mx)$ である．こうして M はまさに加法的に書いたアーベル群[1]である．

ベクトル空間の同型や部分空間の定義を繰り返すことになるだけなので，**同型**と**部分加群**の定義は省略する．加群 M と N の同型は $M\cong N$ と書く．

例 7. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の任意の微分 r 形式は

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r} a_{i_1\cdots i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

という形に一意的に書くことができる．ここで，$a_{i_1\cdots i_r}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の（微分可能な，実解析的な，複素解析的な，例 2 参照）関数の環 A に属す．それゆえ，微分形式の加群は $A^{\binom{n}{r}}$ と同型である．ここで，$\binom{n}{r}$ は 2 項係数である．

例 8. 多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ をそれ自身の上の加群 M（例 1 参照）と考え，一方，定数係数の微分作用素のなす環上の加群と考える（例 4 参照）．この環は多項式環と同型だから，$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 上の新しい加群 N が得られる．この 2 つの加群は同型ではない．実際，どんな $m'\in N$ に対しても，$am'=0$ となる 0 でない元 $a\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ が存在する（a として十分高い階数の任意の微分作用素をとることができる）．しかし，$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ は整域だから，M では，$am=0$ から $a=0$ か $m=0$ が導かれる．

M と N が関数の作る加群で，$A=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ が M には積として働き，N には同型

$$\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]\cong\mathbb{C}\left[\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right]$$

を通して働くとするとき，幾多の場合において，**フーリエ変換は加群 M と N の環 A 上の同型を与える**．ここで，たとえば，$M=N$ が C^∞ 関数 $F(x_1,\ldots,x_n)$ で，すべての $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ に対して[2],

---

[1] ［原註］読者が群やアーベル群の定義を知っていると仮定しているが，これらについては §12 で与える．

[2] ［訳註］ここで，α,β は多重添え数である．たとえば，$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ であり，$\alpha\geq 0$ とは，（任意の i に対して）$\alpha_i\geq 0$ という意味である．

$$\left|x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}F\right|$$

が有界であるようなもののなす空間である場合がこれにあたる．

§4 の定義を思い起し,（例 1 のように）環 A をそれ自身の上の加群と考えれば，環 A のイデアルは加群 A の部分加群であると言うことができる．部分集合として A と異なるイデアルも，A 加群として同型であることはあり得る．たとえば，整域 A のイデアル I が A 加群として A と同型であるのは，I が主イデアルであることと同値である（なぜなら，$I=(i)$ ならば，$a\mapsto ai$ がその同型を与えるし[3]，逆に，$\varphi: A\to I$ が A 加群の同型なら，1 を A の単位元とすれば，$\varphi(1)=i\in I$ から $\varphi(a)=\varphi(a1)=a\varphi(1)=ai$ が導かれるので，$I=(i)$ である）．それゆえ，ある環の加群として同型でないイデアルの集合は，主イデアル整域でない度合を測っていると言える．たとえば,（ある整数 d に対して）$a+b\sqrt{d}$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ という形の数からなる環 $A_d=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{d}$ には，同型でないイデアルは有限個しかない．この個数は環 A_d の**類数**と呼ばれ，算術の基本的な不変量である．

例 9. $\{m_\alpha\}$ を,（環 A 上の）加群 M の元の集合とする．係数を $a_i\in A$ とする可能なすべての 1 次結合 $\sum a_i m_{\alpha_i}$ を考える（$\{m_\alpha\}$ が無限集合であっても，1 次結合ごとには有限個の項しか含まれないとする）．これらの元は加群 M の部分加群をなし，元 $\{m_\alpha\}$ で**生成された部分加群**と呼ばれる．特に M が自分自身の上の加群とみなしたときの A である場合は，すでに出てきている，元 $\{m_\alpha\}$ で生成されたイデアルの概念と同じものになる．系 $\{m_\alpha\}$ が M 全体を生成すれば，M の**生成系**と呼ばれる．

あるベクトル空間から別のベクトル空間への線形写像の概念は，逐語的に加群に移し変えられる．この場合，そのような写像は **A 線形写像**または**準同型**と呼ばれる．環のイデアルの場合とまったく同じように，部分加群 $N\subset M$ に対して，その**剰余類** $m+N$，**商加群** M/N，**標準準同型** $M\to M/N$ を定義することができる．像と核の概念と，準同型と部分加群の間の関係も，環とイデアルの場合に §4 で定式化したものが移し変えられる．

---
[3] ［訳註］これが単射であるのは，A が整域であることによる．

これらの概念によって，幾つかの重要な構成を定義することができる．定義により，加群 M の元をどう足したらよいか，それに A の元をどう掛けたらよいかはわかっているが，2 つの元をどう掛けたらよいかはわからない．しかしながら，状況によっては，加群 M の元に加群 N の元を掛けて，ある第 3 の加群 L の元を値に持つ演算が生じることがある．たとえば，M がベクトル場 $\sum f_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ からなり，N が微分 1 形式 $\sum p_i dx_i$ からなるものであれば，関数の環に属す積 $\sum f_i p_i$ が定義される（座標 $x_1, \ldots, x_n$ の取り方によらない）．同様にして，（座標の取り方によらずに）ベクトル場に微分 r 形式との積を定義し，その結果が微分 $(r-1)$ 形式になるようにできる．

2 つの加群 M, N 上で定義され，加群 L に値を持つ積を，元 $x \in M$, $y \in N$ の対に対して元 $xy \in L$ を与える写像で，次の双線形性を持つものとして定義する．

$$(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y \quad (x_1, x_2 \in M,\ y \in N),$$

$$x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2 \quad (x \in M,\ y_1, y_2 \in N),$$

$$(ax)y = x(ay) = a(xy) \quad (x \in M,\ y \in N, a \in A).$$

L に値を持つ 2 つの加群 M, N 上の積 xy と準同型 $\varphi : L \to L'$ が定義されていれば，$\varphi(xy)$ は L' に値を持つ積になる．与えられた加群 M と N 上の可能なすべての積が，1 つの「普遍的な」積からこのようにして得ることができることがわかる．この普遍的な積の値となる加群を $M \otimes_A N$ と書き，元 x と y の積を $x \otimes y$ と書く．普遍性というのは，L に値を持つ M と N 上の積 xy があれば，

$$\varphi : M \otimes_A N \to L, \qquad xy = \varphi(x \otimes y)$$

という準同型が一意的に存在するということを意味している．そのような普遍性を持つ加群と積が存在するなら，それらは同型を除いて一意的に定まることを，容易に示すことができる．加群 $M \otimes_A N$ と積 $x \otimes y$ の構成は次のようにする．M と N がそれぞれ有限個の生成系 $x_1, \ldots, x_m$ と $y_1, \ldots, y_n$ を持つと仮定する．記号として (x_i, y_j) を考え，これらを生成元とする自由加群 $S = A^{mn}$ を考える．加群 S の中で，

$$\sum_i a_i(x_i, y_j) \quad \text{ただし} \ \sum a_i x_i = 0 \in M$$

という元や

$$\sum_j b_j(x_i, y_j) \quad \text{ただし} \ \sum b_j y_j = 0 \in N$$

という元を考え，これらの元から生成される部分加群 S_0 を考える．

$$M \otimes_A N = S/S_0$$

と置く．$x = \sum a_i x_i$ かつ $y = \sum b_j y_j$ であれば

$$x \otimes y = \sum_{i,j} a_i b_j (x_i \otimes y_j)$$

である．ここで，$x_i \otimes y_j$ は標準準同型 $S \to S/S_0$ による (x_i, y_j) の S/S_0 での像を表わしている．$x \otimes y$ が，x と y の生成元による表示の選び方によらないことを確かめるのは容易で，こうして実際に普遍的な対象が得られるのである．より本質的には[4]，つまり，M と N が有限個の生成元を持つことを仮定せずに，加群 $M \otimes_A N$ を構成することもできる．それには，S の生成元としてあらゆる対 $(x, y), x \in M, y \in N$ をとり，S_0 として

$$(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y), \quad (x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2),$$

$$a(x, y) - (x, ay), \quad a(x, y) - (ax, y)$$

という形の元で生成された部分加群をとればよい．この際，たとえ M と N が有限生成の加群であっても，生成元の無限集合上の自由加群 S を使わなければならなくなる．しかしながら，この構成は，生成系の選び方に関係した任意性はまったく含んでいない．

こうして定義された加群 $M \otimes_A N$ は**加群 M と N のテンソル積**と呼ばれ，$x \otimes y$ は元 x と y のテンソル積と呼ばれる．M と N が体 K 上の有限次元ベクトル空間であれば，$M \otimes_K N$ もまたベクトル空間で，

$$\dim(M \otimes_K N) = \dim M \cdot \dim N$$

---

[4] ［訳註］ここでは直訳すると「より不変的には」という言葉が使われているが，それは表示や定義の不定性を排除するという意味で，この場合，具体的な生成元の取り方に依存した表示をするが，実はその取り方によらないことを（実際にはしないとしても）後で示すという手順を踏むことを意味する．

となる．もし M が $\mathbb{Z}$ 上の加群なら，$M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間である．たとえば，$M\cong\mathbb{Z}^n$ なら $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}^n$ である．しかし，$M\cong\mathbb{Z}/(n)$ であれば $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=0$ となる．つまり，M は $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ に移行すると「消えてしまう」のである．任意の元 $m\in M$ は $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ では $m\otimes 1$ に対応しているが，双線形性から 0 になることが容易に確かめられる．同様にして，整域 A 上の加群 M から，A の商体 K 上のベクトル空間 $M\otimes_A K$ を得ることができる．全く同様にして，体 K 上のベクトル空間 E は K のどんな拡大体 L に対しても L 上のベクトル空間 $E\otimes_K L$ を定義する．$K=\mathbb{R}$ かつ $L=\mathbb{C}$ であれば，これは線形代数で（たとえば線形変換の研究で）非常に有用な**複素化**の操作である．

M_i が変数 x_i の関数 $f(x_i)$ の作るベクトル空間（たとえば，次数 $<k_i$ の多項式の空間）ならば，$M_1\otimes\cdots\otimes M_n$ は，$x_1,\ldots,x_n$ の関数の空間において，

$$f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\qquad (f_i\in M_i)$$

の形の関数の 1 次結合からなるものである．特に，積分方程式論における「退化核」はこの形をしている．（あれこれの種類の）2 変数 x,y の関数 $K(x,y)$ の空間を，x の関数空間と y の関数空間とのテンソル積として一般に説明しようとすることは，極めて自然なことである．こうして，テンソル積の概念のアナロジーが，バナッハ空間や位相ベクトル空間の枠組みの中で生まれる．古典的な関数[5] $K(x,y)$ は，積分作用素

$$f\mapsto\int K(x,y)f(y)dy$$

の核として現われる．一般の場合，テンソル積の元はフレドホルム型の作用素を与えるためにも用いられる．量子力学でのテンソル積も同様の役割を果たしている．M_1 と M_2 が量子力学系 S_1 と S_2 の状態空間であれば，$M_1\otimes M_2$ は粒子 S_1 と S_2 の複合系の状態を記述する．

---

[5] ［訳註］古典的な関数と言っているのは，x,y の値に対して，$K(x,y)$ という値が定まるという意味で「古典的に」定義されている関数というほどのことであり，積分方程式論で用いられることの多いいろいろな種類の「超関数」ではないことを意味している．

ちなみに，これは普通の代数の教科書には出てくることの少ない例である．著者個人と言うより，モスクワ学派の学風の幅の広さを示しており，著者の講義を聞く学生にとって，この種の知識が常識であるようなカリキュラムがモスクワ大学では行われているということであろう．

例 10. 加群 $M \otimes_A \cdots \otimes_A M$（$r$ 回）は $T^r(M)$ と書かれる．M が体 K 上の有限次元ベクトル空間であれば，$T^r(M)$ は r 次の**反変テンソル**の空間である．

例 11. $M \otimes_A M$ の，$x \otimes y - y \otimes x$ $(x, y \in M)$ で生成された部分加群による商加群を，加群 M の**対称積**と言い，$S^2 M$ と書く．これは $x, y \in M$ の可換な積 xy に対する普遍概念である．同様にして，r 次の**対称積** $S^r M$ も定義することができる．これは，すべての可能な元

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_r - x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i+1} \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_r$$

（$i = 1, \ldots, r-1$ かつ $x_i \in M_i$）で生成された部分加群による $T^r(M)$ の商加群である．たとえば，M が，体 K に係数をとる変数 $t_1, \ldots, t_n$ の線形形式の加群であれば，$S^r M$ は $t_1, \ldots, t_n$ に関する r 次の形式（つまり斉次多項式）全体からなっている．

明らかに，加群 M の r 個の元 $x_1, \ldots, x_r$ の $S^r M$ に値を持つ積は常に定義され，その際，積は因子の順序によらない．これには，標準準同型 $T^r(M) \to S^r M$ による $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ の像を考えればよい．加群 $S^r M$ はこれらの積によって生成される．

例 12. 加群 M の r 次の**外積**とは，2 つの積因子が一致する，たとえば $x_i = x_j$ となる表示 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ によって生成される部分加群による，$T^r(M)$ の商加群であり，$\bigwedge^r M$ と書かれる．たとえば，微分可能多様体上の微分 r 形式の加群は，微分 1 形式の加群 M の外積 $\bigwedge^r M$ と同型である．対称積の場合のアナロジーによって，加群 M の r 個の元 $x_1, \ldots, x_r$ の $\bigwedge^r M$ に値を持つ積が定義される．これは $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ と書かれ，それらの**外積**と呼ばれる．定義により，$x_i = x_j$ ならば $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r = 0$ である．これから容易に，$x_1 \wedge \cdots \wedge x_i \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_r = -x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i+1} \wedge x_i \wedge \cdots \wedge x_r$ であることがわかる．これには，$x_i \wedge x_{i+1}$ の代わりに $(x_i + x_{i+1}) \wedge (x_i + x_{i+1})$ とした積に前の関係式を使えばよい．もし M が有限個の生成元 $x_1, \ldots, x_n$ を持つなら，積

$$x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r} \qquad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n)$$

が $\bigwedge^r M$ の生成元である．特に，$r>n$ のときは $\bigwedge^r M=0$ である．M が体 K 上の n 次元ベクトル空間ならば，$r\leq n$ のときは，$\dim\bigwedge^r M=\binom{n}{r}$ である．

例 13. M が環 A 上の加群ならば，M から A への準同型全体の集合 M^* は次のように演算を定義すれば加群になる．

$$(f+g)(m)=f(m)+g(m) \qquad (f,g\in M^*,\ m\in M),$$

$$(af)(m)=af(m) \qquad (f\in M^*,\ a\in A,\ m\in M).$$

これを M の**双対加群**と言う．M が体 K 上のベクトル空間なら，M^* はその双対ベクトル空間である．

空間 $T^r(M^*)$ の元は**共変テンソル**と呼ばれ，$T^p(M)\otimes T^q(M^*)$ の元は (p,q) **型のテンソル**と呼ばれる．

M と N があるベクトル空間 L 上の (p,q) 型と (p',q') 型のテンソル空間であれば，$M\otimes N$ は $(p+p',q+q')$ 型のテンソル空間で，$\otimes$ はテンソルを掛ける演算である．

微分可能多様体上の微分 1 形式の空間は（微分可能関数の環上の加群として），ベクトル場の加群の双対加群である．

最後に，§4 で環に適用して議論したように,「関数的な」直観を加群に拡張してみよう．まず例から始める．

X を微分可能多様体とし，A をその上の微分可能関数の環とし，M を X 上のベクトル場のなす A 加群とする．点 $x\in X$ が与えられると，各ベクトル場 τ は $\tau(x)$ という値をとり，つまり，点 x における X の接空間 T_x への写像 $M\to T_x$ が定義される．関数 $f\in A$ を定数 $\alpha\in\mathbb{R}$ に掛けることを，$f\cdot\alpha=f(x)\alpha$ と定義すれば，この写像の代数的な記述が可能である．このとき，$\mathbb{R}$ は A 加群となり，$T_x\cong M\otimes_A\mathbb{R}$ であり，上の写像は τ を元 $\tau\otimes 1$ に写している．任意の環 A 上の任意の加群 M に対して，この形の写像を構成することができる．$\varphi: A\to K$ が A から体への準同型で，$\varphi(A)=K$ であって，φ の核が極大イデアル $\mathfrak{m}$ であるものとする．$a\in A$ と $\alpha\in K$ に対して $a\alpha=\varphi(a)\alpha$ と置けば，K は A 加群となる．それゆえ,「点 $\mathfrak{m}$ での M

の値」である K 上のベクトル空間 $M_{\mathfrak{m}} = M \otimes_A K$ が定義される．たとえば，代数曲線（または任意の代数多様体）C に対して $A = K[C]$ であれば，§4 で見たように，どんな点 $c \in C$ も準同型 $\varphi_c : A \to K$, $\varphi_c(f) = f(c)$ と，$f(c) = 0$ を満たす関数 $f \in A$ からなる極大イデアル $\mathfrak{m}_c$ を定める．こうして環 $K[C]$ 上の加群 M はそれぞれ，多様体 C によって「パラメータづけられた」ベクトル空間族 M_x を定め，全く同様にして，任意の環 A 上の加群は A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の集合によって「パラメータづけられた」色々な剰余体 $A/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間 $M \otimes_A (A/\mathfrak{m})$ の族を定める．

この状況の幾何的アナロジーは次の通りである．**位相空間 X 上のベクトル空間族**とは，位相空間 $\mathcal{E}$ であって，連続写像

$$f : \mathcal{E} \to X$$

があり，各ファイバー $f^{-1}(x)$ に自然な意味で $\mathcal{E}$ の位相と両立する（$\mathbb{R}$ 上か $\mathbb{C}$ 上かの）ベクトル空間の構造が与えられているものを言う．**族 $f : \mathcal{E} \to X$ から $g : \mathcal{F} \to X$ への準同型**とは，連続写像

$$\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$$

であって，各ファイバー $f^{-1}(x)$ をファイバー $g^{-1}(x)$ に写し，その間の線形写像を与えるもののことである．ベクトル空間族 $\mathcal{E}$ は空間 X 上の連続関数環 $A(X)$ 上の加群 $M_{\mathcal{E}}$ を定義する．族 $\mathcal{E}$ がベクトル空間の一般化とするなら，加群 $M_{\mathcal{E}}$ の元はベクトルの一般化であり，各ファイバー $f^{-1}(x), x \in X$ のベクトルを選ぶものである．より厳密に言えば，**切断**と呼ばれる $M_{\mathcal{E}}$ の元は，連続写像

$$s : X \to \mathcal{E}$$

であって，すべての点 $x \in X$ に対し，点 $s(x)$ がファイバー $f^{-1}(x)$ に属す（つまり，$fs(x) = x$ を満たす）もののことである．演算

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x) \qquad (s_1, s_2 \in M_{\mathcal{E}},\ x \in X),$$

$$(\varphi s)(x) = \varphi(x)s(x) \qquad (\varphi \in A(X),\ x \in X,\ s \in M_{\mathcal{E}})$$

によって，$M_{\mathcal{E}}$ は $A(X)$ 上の加群になる．

§6. 代数的に見た次元

ベクトル空間の基本不変量はその次元であり，これによって有限次元ベクトル空間はクラス分けされる．ベクトル空間の直接の一般化である加群についても，同じように基本的な役割をする類似の概念がある．一方これまでに，代数曲線や代数曲面などを考えて，そのような各対象 C を「座標付ける」のに，C の座標環 $K[C]$ や有理関数体 $K(C)$ を対応させてきた.（代数曲線に対しては 1，代数曲面に対しては 2，などの）直観的な次元の概念は，環 $K[C]$ や体 $K(C)$ の代数的な性質に反映されており，これらの性質はもっと一般な型の環や体に対しても意味を持つし重要でもある．もちろん単純な例と比べれば，状況はずっと複雑にはなる．環や加群の「次元」を数として表わす多くの方法があり,「有限次元性」の類似物も沢山ある．

ベクトル空間の次元は，異なった観点からの定義が可能である．1 次独立なベクトルの最大個数というのが 1 つ，基底のベクトルの数というのが 1 つ（ここでは，同じベクトル空間のすべての基底が同じ数のベクトルからなることを証明する必要がある），そしてもう 1 つは次のような事実を使うことができる．次元がすでに定義されていたとすれば，n 次元ベクトル空間 L は $n-1$ 次元部分空間 L_1 を含み，L_1 は $n-2$ 次元部分空間 L_2 を含み，などなどとなって，

$$L = L_0 \supsetneqq L_1 \supsetneqq L_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq L_n = 0$$

という鎖が得られる．それゆえ，このような鎖の最大の長さとして次元を定義することができる．これらの次元概念をそれぞれ加群に対して考えることができるが，ここでもう，加群の異なる特性値を与えるといった異なる性質になっている．さらに加群に対する有限次元性のアナロジーにも種々なものが得られる．この 3 つのアプローチすべてを考えることにする．第 1 の概念に対しては，環 A が整域であると仮定する．

環 A 上の加群 M の元 $m_1, \ldots, m_k$ が**1次従属**であると言われるのは，すべては 0 でない元 $a_1, \ldots, a_k \in A$ が存在して

$$a_1 m_1 + \cdots + a_k m_k = 0$$

を満たすときである．そして，そうでないときには**1次独立**であると言われる．加群 M の1次独立な元の最大個数をその**ランク**と言い，$\operatorname{rank} M$ と書く．この数が有限なら，M は**有限ランクの加群**であると言う．環 A それ自身は A 加群としてランク1であり，自由加群 A^n はこの新しい定義でランク n である．

見た目は似ているが，ランクの概念は実質的にはベクトル空間の次元とはかなりかけ離れたものである．ランク n が有限で，$m_1, \ldots, m_k$ が加群の1次独立な元の極大集合であったとしても，任意の元 m がそれらによって表わされ得るということは，まったく正しくない．1次従属の関係式 $am + a_1 m_1 + \cdots + a_k m_k = 0$ があっても，一般にはすべてを a で割るわけにはいかない．こうして，ベクトル空間の場合に基底の概念を与えたようにしては，加群のすべての元を標準的に記述することはできない．その上，0次元ベクトル空間のアナロジーとして，ランク0の加群は，極めて自明なように思うかも知れないが，実はどれほど複雑にもできるのである．実際，ある元 $m \in M$ は，$am = 0$ を満たす0でない元 $a \in A$ が存在すれば，1次従属である．このとき m を**ねじれ元**と言う．加群がねじれ元だけからなるならランクは0であり，このような加群は**ねじれ加群**と呼ばれる．たとえば，どんな有限アーベル群も，$\mathbb{Z}$ 加群と考えれば，ねじれ加群である．ベクトル空間 L と線形変換 φ に対して，(§5 例3のように) L を多項式環 $K[x]$ 上の加群と考えたとすれば，L はまたねじれ加群である．なぜなら，多項式 $f(x) \neq 0$ が存在して，$f(\varphi) = 0$（すなわち，すべての $a \in L$ に対して，$(f(\varphi))(a) = 0$ つまり $f \cdot a = 0$）となっているようにできる．(§5 例4のように) 多項式環 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ を，微分作用素の環 $\mathbb{R}\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right]$ 上の加群と考えれば，これもねじれ加群の例になっている．たとえば最後の例など有限次元であるとさえ直観的には受入れにくいほどだが，これらの加群はすべてランク0なのである．

有限次元性のよりよい近似は，基底の存在に基づくベクトル空間の有限次元性の定義によって与えられる．

有限の生成系を持つ加群 M は**有限生成**，または**有限型**の加群であると言われる．こうして，M には，任意の元がその元の1次結合で表わされるような有限個の元の系 $m_1, \ldots, m_k$ が存在する．しかし，ベクトル空間のときと違って，この表示が一意的であることは要求できない．

$\mathbb{Z}$ 加群と考えた有限アーベル群や，1つの線形変換を与えたベクトル空間を $K[x]$ 加群と考えたものと同じで，それ自身の上の加群と考えた環やもっと一般に有限ランクの自由加群は有限型である．多項式環 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ は微分作用素の環 $\mathbb{R}\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right]$ 上の加群として有限型ではない．というのは，有限個の多項式 $F_1, \ldots, F_k$ から始め，それらに微分を働かせることによってより，高次の多項式を得ることができないからである．

有限型の加群の準同型像は，生成系の準同型像が生成系になって，また有限型の加群になる．特に，自由加群 A^n の準同型像はすべて有限型であり，高々 n 個の元で生成される．この逆もまた正しく，もし M が生成元 $m_1, \ldots, m_k$ を持てば，k 組 $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$（定義により A^k はこのような k 組からなるものである）から元 $a_1m_1 + \cdots + a_km_k$ への対応は，M を像とする準同型である．これによって次の定理が証明された．

定理 I. 有限型のどんな加群も，有限型の自由加群 A^n の準同型像である．

特に，1つの元で生成される加群は環 A 自身の準同型像であり，取りも直さず（準同型定理により）I を A のイデアルとして，A/I の形をしている．$I = 0$ であれば，M は A と同型である．この形の加群は**巡回加群**と呼ばれる．これを1次元ベクトル空間のアナロジーと考えることができる．

ある場合には，有限型の加群は有限次元ベクトル空間にかなり近いものになる．たとえば，整域 A で，そのすべてのイデアルが主イデアル（つまり主イデアル整域 PID）であれば，次の結果が得られる．

定理 II. 主イデアル整域上の加群に関する定理．主イデアル整域上の有限型の加群は，有限個の巡回加群の直和に同型である．巡回加群は A と同型であるか，π を素元とする $A/(\pi^k)$ の形の巡回加群の直和に分解するかのいずれかである．このような加群の直和としての加群の表示は一意的である．

もし加群 M がねじれ加群であれば，A と同型な直和因子はない．これが起こるのは，たとえば $A=\mathbb{Z}$ で M が有限アーベル群のときである．この場合，上に述べた定理は有限アーベル群の分類を与えている．$A=\mathbb{C}[x]$ で $M=L$ が $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間で線形変換を 1 つ与えたもの（§5 例 3 参照）のときも同じことが起こっている．この場合，容易にわかるように，この定理は線形変換のジョルダン標準形への還元を与えている．

定理 II の 1 つの証明は M の

$$M=A^n/N \qquad (N\subset A^n)$$

という形の表示（定理 I）に基づいている．N も有限型の加群であることが容易に証明される．もし

$A^n=Ae_1\oplus\cdots\oplus Ae_n,\ N=(u_1,\dots,u_m)$ であれば，$u_i=\sum c_{ij}e_j$

であり，$M=A^n/N$ という表示は M が「線形方程式

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}e_j=0 \qquad (i=1,\dots,m)$$

によって定義され」ていることを示している．この系に，線形方程式系の理論から古典的なガウスの方法のアイデアを適用してみよう．

基本補題． **主イデアル整域 A の元を成分とする任意の行列 R は「対角化」することができる．つまり，対角行列 D と，(R の元を成分とする行列として）可逆な行列 P,Q によって $R=PDQ$ の形に表わすことができる．**

上の行列 $R=(c_{ij})$ にこれを適用すると $P^{-1}RQ^{-1}=D$ となり，P^{-1}, Q^{-1} は生成系 $e_1,\dots,e_n$ と $u_1,\dots,u_m$ から別の生成系への変換行列と解釈すれば，行列 (c_{ij}) が対角行列であるような生成系が得られたことになる．もし

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (a_1 \neq 0, \dots, a_r \neq 0)$$

であれば，$M = A^n/N \cong A/(a_1) \oplus \cdots \oplus A/(a_r) \oplus A^{n-r}$ である．これから定理 II の主張まではもう遠い道のりではない．

環 A が体である場合には基本補題はよく知られている．その場合，ガウスの方法は，行列を「基本変形」によって対角形にする可能性を与えている．基本変形は，2 つの行の交換と，1 つの行に他の行の何倍かを足すことで，列に対しても同様のことをするものである[1]．この際，行と列に関する基本変形は，それぞれ左と右から，ある可逆な行列を掛けることに同等である．

類似の議論が $A = \mathbb{Z}$ や $A = K[x]$ の場合にも有効である．$A = \mathbb{Z}$ や $A = K[x]$ の場合とまったく同じようにして，任意のユークリッド環が主イデアル環であることが証明される．ガウスの方法は任意のユークリッド環 A に適用され，A に成分を持つ任意の行列が，行と列に関する基本変形によって対角形に帰着される．面白いことに，任意の主イデアル環に対してはこのことは正しくない．$a + b\alpha$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $\alpha^2 = \alpha - 5$ の形の数は主イデアル環をなす[2]が，A に成分を持つ 2 次の行列で，基本変形によっては対角形に帰着されないものが存在する[3]．A がユークリッド環の場合には，線形方程式系の理論のガウスの方法のアナロジーがとりわけ明らかなものとなる．この場

1　［訳註］体の場合には通常，1 つの行に 0 でない元を掛けるという変形も考え，それにより対角成分が 0 か 1 の対角行列にまで変形することが多い．しかし，今問題にしているのは体ではなく，0 でない元が可逆とは限らない．

2　［訳註］方程式を解けば $\alpha = (1 \pm \sqrt{-19})/2$ となり，$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$ の極大整環になる．一般に $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ の極大整環がユークリッド環になるための条件はよく知られており，$D = 1, 2, 3, 7, 11$ の 5 種類しかない．この証明はたとえば武隈 [125] §6.1 定理 3 か，ボレヴィッチ–シャファレヴィッチ [15] §3.2 問題 6 を指示通りに解けばよい．また，$D < 19$ で，$\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ の極大整環がユークリッド環でないものはまた主イデアル整域でもないことが知られている．

3　［訳註］1966 年のコーンの論文 [119] に掲載されていることを著者から教えていただいた．具体的には，α を上のものとし，A を $\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$ の極大整環とすると，たとえば，

合には，環 A 上の行列を対角形に変換することは，以下のような基本操作によって実現することができる．2 つの行の交換，ある行に別の行に A の元を掛けたものを加えること，ある行に A の可逆元を掛けることと，列に対する類似の操作．各基本操作は，左か右かから，単位行列とただ 1 つだけの成分しか異なっていない可逆な行列を掛けることに同等である[4]．このことから基本補題が導かれる[5]．

特に $A = \mathbb{Z}$ なら，定理 II によって，有限個の生成元を持つアーベル群の構造の記述ができるようになる．そのような群は，たとえば，トポロジーでは有限複体のホモロジー群やコホモロジー群として現われてくる（これらについては §21 参照）．

しかしながら，直観的には「有限次元性」に密接に結びついているある性質が有限型の加群に対しては一般には成り立っておらず，その部分加群は必ずしも有限型ではない．このことは最も単純な場合にも起こり得て，環 A の部分加群，つまりイデアルは常に有限型とは限らない．たとえば，$0 \in \mathbb{R}$ での C^∞ 関数の芽の環 $\mathcal{E}$ では，0 ですべての導関数をこめて 0 になるような関数の作るイデアルは，有限個の生成元を持たない（§4 例 8 参照）．同じように，無限個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ の多項式環では（もちろん個々の多項式は有限個の生成元にしかよっていないとする），定数項を持たない多項式の全体は有限個の生成元を持たないイデアルになる．こうして，そのすべての部分加群が有限型であるような加群を考えることによって，有限次元性の条件を強めることは自然なことである．この性質を持つ加群を**ネーター加群**と

$$\begin{pmatrix} 3-\alpha & 2+\alpha \\ -3-2\alpha & 5-2\alpha \end{pmatrix}$$

という行列式 1 の 2 次の行列が，

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (a, b, c \in A,\ a, b \text{ は可逆元})$$

の形の行列で生成される環には含まれないという形で示されている．

4 ［訳註］筆が滑ったのだろう．2 つの行の交換に使われる行列は，成分は 0 と 1 だけだが，単位行列とは 4ヶ所で異なっている．

5 ［訳註］これはユークリッド環の場合の証明である．一般の主イデアル整域に対してもある程度は同じような証明ができる．たとえば，ハンガーフォード [121] §7.2 命題 2.11 の証明をみれば，行列を具体的に作っているが，その行列は基本行列では得られない．堀田 [120] 定理 12.1 にも同じ手法の証明があるが，そこでは拡張された意味で基本行列という言葉を使っている．基本補題の証明は普通，もう少し抽象的な議論を使っていて，たとえばブルバキ [118] 第 7 章 §4 系 1 か，山崎圭次郎 [127] 第 4 章 §4.1 系 2 にある証明のようなものが多い．

言う．この概念は，ベクトル空間の次元のまだ使っていない特徴付けで，部分空間の鎖の言葉を使うものに関連付けることができる．つまり，ネーター条件は，加群に関する条件で，任意の部分加群の列

$$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k \subsetneq \cdots$$

が有限であるという性質（**昇鎖が途切れるという条件**）と同値である．これが同値であることの証明はほとんど明らかである．

有限次元性のアナロジーの観点から，このアイデアを環の分類に適用することもできる．その環上の任意の有限型の加群がネーター加群であるような環に注意を向けることは自然であり，この性質を持つ環を**ネーター環**と言う．こうなるためにはまず何よりも，その環がそれ自身の上の加群としてネーター加群であること，つまりあらゆるイデアルが有限個の生成系を持つということが必要となる．しかし，これがまた十分条件でもあることを確かめるのは難しいことではない．環 A のすべてのイデアルが有限の基底を持つなら，自由加群 A^n もまたネーター加群であり，したがってその準同型像も，つまりすべての有限型の加群もネーター加群である．

ネーター環の概念はどれほど豊かなのだろうか？　明らかに，そのすべてのイデアルが主イデアルであるような環はすべてネーター環である．次の定理は基本的な事実である．

定理 III．ヒルベルトの基底定理．ネーター環 A に対しては，多項式環 $A[x]$ もまたネーター環である．

証明は，与えられたイデアル $I \subset A[x]$ に対して，I に含まれる次数 n の多項式の最高次の項の係数となるような元からなるイデアル $J_n \subset A$ ($n = 1, 2, \ldots$) を考え，A のネーター性を繰り返し用いることに基づいている．ヒルベルトの基底定理から，A がネーター環なら，任意個数の変数の多項式環 $A[x_1, \ldots, x_n]$ もまたネーター環になる．特に，$K[x_1, \ldots, x_n]$ はネーター環である．ヒルベルトがこの定理を証明したのは，まさにこのためであり，彼の定式化は次のような具体的な形であった．

定理． **$K[x_1, \ldots, x_n]$ の多項式の集合 $\{F_\alpha\}$ が与えられたとき，有限の部**

分集合 $F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_m}$ が存在して，どんな多項式 F_α も 1 次結合

$$P_1 F_{\alpha_1} + \cdots + P_m F_{\alpha_m} \qquad (P_1, \dots, P_m \in K[x_1, \dots, x_n])$$

として表わすことができる．

けれど，もう一歩進むこともできる．明らかに，A がネーター環なら，A のどんな準同型像 B もネーター環になる．部分環 A を含む環 R が A 上有限生成，または A 上有限型の環であると言うのは，R の元 $r_1, \dots, r_n$ が存在して，その他のすべての R の元が，A の元を係数とするそれらの多項式として表わせるときである．このとき，元 $r_1, \dots, r_n$ を A 上の R の生成元と呼ぶ．多項式環 $A[x_1, \dots, x_n]$ と

$$F(x_1, \dots, x_n) \mapsto F(r_1, \dots, r_n)$$

という対応を考える．これは準同型で，その像が R である．こうして次の結果が得られる．

定理 IV．環 A 上のどんな有限型の環も，多項式環 $A[x_1, \dots, x_n]$ の準同型像である．それゆえ上のことから，ネーター環上の有限型の環はまたネーター環であることが得られる．

たとえば，代数曲線（または代数曲面，または代数多様体）C の座標環 $K[C]$ はネーター環である．C が方程式 $F(x,y) = 0$ で定義されるなら，x と y は K 上の $K[C]$ の生成元である．

応用上重要なネーター環の例に，原点で正則な n 複素変数関数の環 $\mathcal{O}_n$ と形式的ベキ級数環 $K[[t_1, \dots, t_n]]$ がある．

有限次元の環という役割に対しては，ネーター環は最も自然な候補である．この環に対しては次元の概念も定義することができるが，それにはもっと厳密な扱いが必要になる．

ある単純な環（たとえば体）上の有限型の環であるという条件は「有限次元性」の具体的で有効な形ではあるが，ネーター性は，主張は弱くなるものの，より本来的な条件である．ある重要な場合においては，この 2 つの概念は一致する．

環 A が次数つきであるとは，部分群（つまり，$\mathbb{Z}$ 加群としての A の部分加群） A_n，$n = 0, 1, \ldots$ が特定されていて，$x \in A_n$，$y \in A_m$ に対して $xy \in A_{n+m}$ となり，どんな元 $x \in A$ も一意的に

$$x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k \qquad (x_i \in A_i) \tag{1}$$

の形に表示することができるという条件を満たすときに言う．元 $x \in A_n$ を斉次であると言い，(1) の表示を x の斉次成分への分解と言う．部分集合 A_0 は明らかに A の部分環である．

たとえば，$K[x_1, \ldots, x_m]$ は，A_n が $x_1, \ldots, x_m$ に関する n 次斉次多項式の空間であり，$A_0 = K$ であるような，次数つき環である．

次の結果は容易に確かめることができる．

定理 V． 次数つき環 A がネーター環であれば，A は A_0 上有限型の環である[6]．

証明． 明らかに，(1) で $x_0 = 0$ であるような元 $x \in A$ の全体は，イデアル I_0 である．定理の主張を確かめるには，まさにこの 1 つのイデアルが有限生成であれば十分であることがわかる．実際，イデアル I_0 の生成元の集合をとり，各生成元を (1) の形に表わし，それに現われる斉次の項 x_i をすべて考える[7]．斉次の元 $x_1, \ldots, x_N$ $(x_i \in A_{n_i})$ の集合が得られ，もちろんこれもまた I_0 を生成している．これらの元 $x_1, \ldots, x_N$ は，A_0 上の A の生成元である．実際，任意の元 $x \in A_n$ $(n > 0)$ が，A_0 に係数を持つ $x_1, \ldots, x_N$ の多項式として表わすことができることを証明すればよい．仮定により $I_0 = (x_1, \ldots, x_N)$ であり，特に

$$x = a_1 x_1 + \cdots + a_N x_N \qquad (a_i \in A)$$

となっている．元 a_i の斉次成分への分解を考え，左辺が $x \in A_n$ であるこ

---

6 ［訳註］英訳では，定理の主張は十分性ばかりでなく，「次数つき環 A がネーター環であることと，A_0 がネーター環でかつ A が A_0 上有限型の環であることは同値である」となっている．類書でもその形で与えられることが多い．

本書の証明は十分性の証明だけが与えられているのだが，多少のギャップはあるものの，必要性についても証明の本質的な部分は含まれている．きちんとした証明はたとえば，松村 [115] や永田 [123] p.124, 永田 [124] p.79 などにある．

7 ［訳註］I_0 の定義から，各 x_i もまた I_0 の元である．

とに注意すると，$a_i \in A_{m_i}, x_i \in A_{n_i}$ $(n_i + m_i = n)$ であると仮定することができる．$n_i = n$ ならば，成分 $a_i x_i$ は係数が $a_i \in A_0$ であるように x_i で表わされているし，$n_i < n$ のときは x に対して行った議論を a_i に対して適用することができる．有限回の議論の末に，x に対する要求された表示[8]が得られる．

体に対して,「有限次元性」の直観的な概念が，環とのアナロジーによって実現される．体 L が部分体 K の**有限型の拡大**であるとは，有限個の元 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ が存在して，それ以外の L のすべての元が K に係数を持つ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の有理関数として表わすことができるときに言う．この場合，$L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ と書き，L を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ によって生成された K の拡大（体）であると言う．たとえば，有理関数体 $K(x_1, \dots, x_n)$ は体 K の有限型の拡大である．複素数体は実数体の有限型の拡大体であり，実際，複素数は1つの元 i の極めて単純な有理関数 $a + bi$ として表わされる．任意の有限体 $\mathbb{F}_q$ は，その部分素体の有限型の拡大である．$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ としては，たとえば $\mathbb{F}_q$ のすべての元をとることもできる．C が方程式 $F(x, y) = 0$ で与えられた既約な代数曲線であれば，$K(C)$ のすべての関数は座標 x, y の有理関数であるから，$K(C)$ は K の有限型の拡大体である．同じことが，C が代数曲面などになっても成り立つ．

これらの例からみれば，有限型の拡大に対しては，代数曲線，代数曲面，また任意の代数多様体に対する次元の直観的な概念に対応する，次元の概念のアナロジーが存在するのも，それらしく思えてくる．

体 L の元 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が L の部分体 K 上**代数的に従属**であるとは，恒等的には0でない多項式 $F \in K[x_1, \dots, x_n]$ があって

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

が成り立つときに言う．このとき α_n がこの関係式に実際に入っていれば，元 α_n は $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ **に代数的に従属**していると言う．代数的従属性のいくつかの単純な性質は，1次従属性のよく知られた性質と同じものである．たとえば，もし元 α が $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ に代数的に従属していて，α_i のそれぞれが

[8] ［訳註］もちろん，A_0 の元を係数とする $x_1, \dots, x_N$ の多項式である．

$\beta_1, \dots, \beta_m$ に代数的に従属していれば，α は $\beta_1, \dots, \beta_m$ に代数的に従属している．このことから，1 次従属性に対するよく知られた議論を形式的に繰り返すことにより，有限型の拡大体では，代数的に独立な元の個数に関する上界が存在することを，証明することができる．有限型の拡大 L/K の代数的に独立な元の最大個数をこの拡大の**超越次数**と言い，$\mathrm{tr\,deg}\, L/K$ と書く．

拡大体 L/K の超越次数が n ならば，L は n 個の代数的に独立な元の集合で，その他のどんな元もこれらに代数的に従属しているようなものを含んでいる．逆に，この性質を持つ n 個の元が存在すれば，超越次数は n に等しい．

たとえば，体 K の拡大としての有理関数体 $K(x_1, \dots, x_n)$ の超越次数は n である．C を方程式 $F(x, y) = 0$ で定義された既約な代数曲線とする．もし，たとえば y が実際に F の中に現れるなら，体 $K(C)$ の中で元 x は代数的に独立で，y は，したがって $K(C)$ の x 以外のすべての元は x に代数的に従属する．それゆえ，拡大 $K(C)/K$ の超越次数は 1 である．同じように，C が代数曲面であれば，体 $K(C)$ の超越次数は 2 であることが証明される．こうして，実際に幾何的な直観に一致する次元の概念に到達した．C が代数多様体のとき，体 $K(C)$ の超越次数を C の**次元**と言い，$\dim C$ と書く．これはたとえば

$$C_1 \subset C_2 \quad \text{ならば} \quad \dim C_1 \leq \dim C_2$$

のような自然な性質を満たしている．

例 1.　X をコンパクトで複素解析的な n 次元多様体とし，$\mathcal{M}(X)$ を X 上の有理形関数全体の体とすると，

$$\mathrm{tr\,deg}\, \mathcal{M}(X)/\mathbb{C} \leq n$$

を証明することができる．X が $\mathbb{C}$ 上の代数多様体であれば，

$$\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(X), \qquad \mathrm{tr\,deg}\, \mathcal{M}(X) = n$$

である．こうして，$\mathrm{tr\,deg}\, \mathcal{M}(X)/\mathbb{C}$ という数は，複素多様体 X が代数多様体にどれほど近いかの物差しになっている．複素トーラスのような特殊な場合ですら，0 から n までの可能なすべての値が現れる（§15 参照）．

有限型で超越次数が 0 であるような拡大 L/K は，一体どんな風に見えるのだろうか？　超越次数が 0 であるということは，どんな元 $\alpha \in L$ も，ある多項式 F に対して，方程式 $F(\alpha)=0$ を満たすことを意味している．このような元 α は K 上**代数的**であると言われる．L/K が有限型の拡大だから，ある $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in L$ に対して

$$L = K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

となっている．

こうして，L/K は，代数的な元 α に対する $K(\alpha)/K$ の形の拡大を繰り返すことによって得ることができる．逆に，このような拡大の合成の超越次数は常に 0 である．

K 上代数的な元 α に対して，$L=K(\alpha)$ であるとする．$F(\alpha)=0$ を満たすすべての多項式（α が K 上代数的だから存在する）$F(x) \in K[x]$ のうちで最小次数のものが存在する．そして他の全てはこの多項式によって割ることができる．もしもそうなってなければ，多項式の割り算をすることによって，同じ性質を持つより低次の多項式が得られるからである．この最小次数の多項式 P は定数倍を除いて一意的に定まる．これを元 α の**最小多項式**と言う．明らかに，P は K 上既約である．最小多項式 P がわかれば，体 $L=K(\alpha)$ のすべての元を非常に具体的な形に表わすことができる．このために，多項式 $F \in K[x]$ を元 $F(\alpha) \in L$ に写す準同型

$$\varphi : K[x] \longrightarrow L$$

を考える．容易にわかるように，φ の核は主イデアル (P) である．それゆえ，その像は（準同型定理により）$K[x]/(P)$ と同型である．その像が L 全体になることを示すのは難しくない（このためには，$\mathrm{Im}\,\varphi$ が体であり，α を含むことを注意すればよい）．こうして，L は $K[x]/(P)$ と同型である．多項式 P の次数が n ならば，§4 式 (2) で見たように，体 $L \cong K[x]/(P)$ のあらゆる元は

$$\xi = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \qquad (a_i \in K) \tag{2}$$

の形に表わすことができ，この表示は一意的である．この状況の古典的な例

は，$K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$, $P(x) = x^2 + 1$ であり，あらゆる複素数は $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ と表わすことができる．

体 $L = K(\alpha)$ の元に対する表示 (2) から重要な系が得られる．L の中の積は忘れて，加法と K の元との積だけを考えることにする．すると，(2) から，L が K 上有限次元のベクトル空間で，$1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ がその基底であることになる．L が K 上のベクトル空間として有限次元なら，L/K は有限拡大である．その次元を拡大 L/K の次数と言い，$[L:K]$ と書く．前の例では $[L:K] = n$ であり，特に $[\mathbb{C}:\mathbb{R}] = 2$ である．

たとえば，$\mathbb{F}_q$ が有限体で p が $\mathbb{F}_q$ の標数ならば，$\mathbb{F}_q$ は p 個の元からなる素体 $\mathbb{F}_p$ を含む．明らかに $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ は有限拡大である．$[\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p] = n$ ならば，n 個の元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ が存在して，その他のどんな元も

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n \qquad (a_i \in \mathbb{F}_p)$$

の形に一意的に表わすことができ，このことから，有限体 $\mathbb{F}_q$ の元の個数は p^n に等しい，つまり常に p のベキであることがわかる．

拡大が有限であるという条件が推移的であること，つまり，L/K と Λ/L が有限拡大ならば Λ/K も有限拡大で，

$$[\Lambda:K] = [\Lambda:L]\,[L:K] \tag{3}$$

となることは容易に証明される．これまでのことから，有限型の拡大で超越次数が 0 のものは有限拡大であることがわかる．逆に，L/K が有限拡大で $[L:K] = n$ であれば，任意の元 $\alpha \in L$ に対して，元 $1, \alpha, \ldots, \alpha^n$ は必ず K 上 1 次従属になる（$n+1$ 個の元だから）．このことから α が代数的で，したがって L の超越次数が 0 であることがわかる．こうして，超越次数が 0 の有限型の拡大のもう 1 つの特徴付けが得られた．それは有限拡大ということである．上に述べたことから，どんな有限拡大も $K(\alpha)$ の形の拡大の連鎖として得られる．しかし，たとえば標数 0 の体に対するような非常に広い範囲で，次の結果が成り立つ．

定理 VI. 原始元定理． α と β が体 $L = K(\alpha, \beta)$ の代数的な元であれば，$L = K(\gamma)$ であるような元 $\gamma \in L$ が存在する．

この場合も，また任意の有限拡大 $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ の場合でも，$L =$

$K(\alpha)$ の形に表わすことができ，それゆえ，$L \cong K[x]/(P)$ であり，L の元の表示 **(2)** が得られる．

実際，この結果はずっと広い仮定のもとで成り立ち，たとえば有限体に対して成り立っている[9]．

あらゆる多項式が体 K に根を持てば，つまり，K が代数的に閉じていれば，すべての既約多項式は 1 次式であり，K の拡大体は K の元以外の代数的な元を含まない．それゆえ，K は K 自身以外のどんな有限拡大も持たない．複素数体 $\mathbb{C}$ はこういう体である．実数体は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ という 2 つの有限拡大しか持たない．しかし，有理数体 $\mathbb{Q}$ と（$K = \mathbb{C}$ のときでも）有理関数体 $K(t)$ は，非常に多くの有限拡大を持っている．これらは，代数的数（$\mathbb{Q}$ の場合）や代数関数（$\mathbb{C}(t)$ の場合）を研究するための道具である．$K(t)$ のどんな有限拡大も，ある代数曲線 C に対する，$K(C)$ の形をしており，体 $K(x_1, \ldots, x_n)$ の有限拡大は，ある（n 次元の）代数多様体 V に対する，$K(V)$ の形をしていることを示すことができる．

既約多項式 $P(x)$ のある根 α に対する拡大体 $K(\alpha)$ はこの多項式によって定まり，それゆえ有限拡大の理論は 1 変数多項式の理論の明確な言語で（ありまた「哲学」でも）ある．同じ 1 つの拡大 L/K においても，$L = K(\alpha)$ となるような元 α は沢山あるし，これらに対応する多項式 $P(x)$ も沢山ある．拡大自身は，これらすべてが共通に持つ性質を反映している．こうして，代数曲線 C に対して関数体 $K(C)$ を与えることのアナロジーである，もう 1 つの「座標化」の例が得られる．体 $K(\alpha)$ を $K[x]/(P)$ の形に構成することは，曲線 C の方程式から体 $K(C)$ を構成することと完全に平行して行われる．

有限拡大の性質の具体的な問題への応用を説明するのに一番初等的な例は，**定木とコンパスによる作図の理論**である．これらの作図を座標の言葉に翻訳すると，すでに作図されている区間を表わす数の加法，減法，乗法，除法の操作か，（直線と円の交点や 2 円の交点を求めるために）そういう数を係数とする 2 次方程式を解くことになる，ということは容易に確かめられる．それ

9 ［訳註］たとえば永田 [123] 定理 2.3.2, 定理 2.3.5, 定理 2.5.2 を合わせると，定理 VI が標数 0 の場合と有限体の場合に成り立つことの証明が得られる．

ゆえ，問題の条件で与えられているすべての量による $\mathbb{Q}$ の拡大を K とし，求めようとする量の数値を α とすると，この量を定木とコンパスで作図するという問題は，鎖

$$L/L_1,\ L_1/L_2, \ldots, L_{n-2}/L_{n-1},\ L_{n-1}/L_n \quad (L_n = K)$$

として表わすことができるような拡大 L/K の中に α が含まれるかどうかという問題になる．ただし，鎖の中のそれぞれの拡大は $L_{i-1} = L_i(\beta)$ という形で，β がある 2 次方程式を満たすようなものとする[10]．この条件は $[L_{i-1} : L_i] = 2$ と同値である．関係式 (3) を使うと，$[L : K] = 2^n$ が得られる．$\alpha \in L$ であれば $K(\alpha) \subset L$ であり，また (3) から次数 $[K(\alpha) : K]$ は 2 のベキでなければならない．これは必要条件に過ぎない．定木とコンパスによる作図可能性問題の十分条件も体 $K(\alpha)$ の言葉で定式化することができるが，多少複雑になる．しかしながら，すでに得られた必要条件だけでも，たとえば立方体の体積を倍にする問題が定木とコンパスでは解くことができないことが証明される．その問題は多項式 $x^3 - 2$ の根の構成に帰着され，そして

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$$

であるからである．まったく同じようにして，角の 3 等分の問題は，たとえば，$a = \cos\varphi$ が知られていることから $\alpha = \cos\varphi/3$ を作図するという問題になる．これは 3 次方程式

$$4\alpha^3 - 3\alpha - a = 0$$

に関係する．φ が任意なのだから，a を独立変数と考えるべきであって，それゆえ，K は有理関数体 $\mathbb{Q}(a)$ で，$[K(\alpha) : K] = 3$ であり，またしても問題は定木とコンパスでは解くことができないことになる．

同じように，代数方程式を根号で解くという問題はまた，有限拡大の構造に関する問題になる．これについては §18A で詳しく取り扱うことにする．

10　[訳註] β の満たす 2 次方程式の係数は L_i の元であればよい．

§7. 代数的に見た無限小概念

「位数 n の無限小を除いた」量の考察は,（ある環の）元 ε で $\varepsilon^n = 0$ を満たすものを無限小のアナロジーとして考えることによって，代数の言葉に翻訳するのが便利である．たとえば，C を代数曲線で，簡単のために，複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えられているとする．可換環

$$U = \{a + a_1\varepsilon \mid a, a_1 \in \mathbb{C},\ \varepsilon^2 = 0\}$$

を導入する．より厳密には，この環は $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ と書き，ε は標準準同型 $\mathbb{C}[x] \to U$ での x の像ととることができる．$\mathbb{C}$ 上の準同型 $\varphi : \mathbb{C}[C] \to U$，つまり（構成から，$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[C]$ かつ $\mathbb{C} \subset U$ となっていて）複素数が恒等的に写されるような準同型を考える．このような φ は，座標 x と y の像 $\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ によって定まる．なぜなら，$\mathbb{C}[C]$ の他の元は x と y の多項式 $h(x, y)$ であり，$\varphi(h(x, y)) = h(\varphi(x), \varphi(y))$ となるからである．また，曲線 C の方程式が $F(x, y) = 0$ であれば，U の元 $\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ もまた同じ方程式

$$F(\varphi(x), \varphi(y)) = 0 \tag{1}$$

を満たさねばならない．$\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ をそれぞれ $\varphi(x) = a + a_1\varepsilon$ と $\varphi(y) = b + b_1\varepsilon$ と書こう．環 U には，$\psi(a + a_1\varepsilon) = a$ で与えられる標準準同型 $\psi : U \to \mathbb{C}$ がある．これを関係式 (1) に代入すると $F(a, b) = 0$ が得られ，つまり φ は点 $(a, b) \in C$ を定めることになる．しかしながら，この点を知ったとしても，$\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ の表示の a と b という項が再現できるだけである．係数 a_1 と b_1 は何を意味するのだろうか？ $\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ の値を (1) に代入して，$F(a + a_1\varepsilon,\ b + b_1\varepsilon)$ を $c + c_1\varepsilon$ という標準的な形に書く．F をテイラー展開して，$F(a, b) = 0$ と $\varepsilon^2 = 0$ とを使うと，$F(a + a_1\varepsilon,\ b + b_1\varepsilon) = (a_1 F'_x(a, b) + b_1 F'_y(a, b))\varepsilon$ であることがわかり，条件 (1) は

$$F(a,b)=0, \qquad a_1F'_x(a,b)+b_1F'_y(a,b)=0$$

と書き直すことができる．このことは，(a,b) が曲線 C の点であり，(a_1,b_1) が点 (a,b) における C の接線上のベクトルであることを意味している．ここで，(a,b) が曲線 C の特異点でない，つまり，偏微係数 $F'_x(a,b)$ と $F'_y(a,b)$ が同時には 0 でないことを仮定する．こうした議論から，$\mathbb{C}[C]$ から U へのすべての準同型を記述できる，つまり，それらの準同型が，曲線 C の点とこの点での接線上のベクトルとの対に対応していることが容易にわかる．同様に，代数曲面の場合には接平面の記述が得られる，などとなることがわかる．

ここまでの議論を，いくぶん違う角度から定式化し直してみよう．準同型 $\varphi:\mathbb{C}[C]\to U$ に標準準同型 $\psi:U\to\mathbb{C}$ を合成すると

$$\mathbb{C}[C]\xrightarrow{\varphi}U\xrightarrow{\psi}\mathbb{C}$$

という準同型の列が得られる．合成 $\overline{\varphi}=\psi\varphi$ は点 $x_0\in C$ を定め，関数をその点 x_0 での値に対応させるものになる（§4 例 2 参照）．したがって，この核は $\mathbb{C}[C]$ の極大イデアル $\mathfrak{M}_{x_0}$ で，x_0 で値が 0 になる関数からなるものになる．$x_0=(a,b)$ であれば，$x-a$ と $y-b$ は $\mathfrak{M}_{x_0}$ に属する．このことは，$\varphi(x-a)$ と $\varphi(y-b)$ が $a_1\varepsilon$ と $b_1\varepsilon$ という形をしていること，つまり，これらが環 U のイデアル $I=\operatorname{Ker}\psi$ に属しているという事実に対応している．x_0 での接空間（この場合は接線）のベクトルは，このイデアルに属する $x-a$ と $y-b$ の像，つまり φ の $\mathfrak{M}_{x_0}$ への制限によって定まる．($\varepsilon^2=0$ だから）明らかに φ は $\mathfrak{M}^2_{x_0}$ の上で 0 になる．それゆえ，$\overline{\varphi}$ は空間 $\mathfrak{M}_{x_0}/\mathfrak{M}^2_{x_0}$ から $\mathbb{C}$ への線形写像を定め，この線形関数が点 x_0 での接線上のベクトルを定めるのである．任意の線形関数 $\mathfrak{M}_{x_0}/\mathfrak{M}^2_{x_0}\to\mathbb{C}$ が点 x_0 での接ベクトルを与えることを証明するのは難しくない．

定理． **点 x_0 での接空間は $\mathfrak{M}_{x_0}/\mathfrak{M}^2_{x_0}$ の双対ベクトル空間である．ここで，$\mathfrak{M}_{x_0}$ は点 x_0 に対応する極大イデアルである．**

同じことが，方程式 $F(x,y,z)=0$ を持つ代数曲面 C に対して成り立つ．非特異な点 $x_0=(a,b,c)$（3 つの偏微分係数

$$F'_x(a,b), \quad F'_y(a,b), \quad F'_z(a,b)$$

のすべてが同時には 0 にならない点のこと）における C の接平面は，商空間 $\mathfrak{M}_{x_0}/\mathfrak{M}_{x_0}^2$ の双対ベクトル空間と同一視することができるのである．後になってこの議論を任意の代数多様体に適用するが，当面はそれが代数的な場合以外の応用も持つことを示すことにする．

例 1. A を n 次元ベクトル空間 E の点 O のある近傍で微分可能な関数の作る環とし，$\mathfrak{M}$ を O で 0 になる関数の作るイデアルとする．テイラーの公式によって，$f \in \mathfrak{M}$ は，ℓ をある線形関数として，$f \equiv \ell \pmod{\mathfrak{M}^2}$ の形に表わすことができる．E 上の線形関数は双対空間 E^* を成すので，またもや同型 $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \cong E^*$ が得られる．もし $\xi \in E$ ならば，$\ell(\xi)$ は偏微係数 $\ell(\xi) = \dfrac{\partial f}{\partial \xi}(O)$ として解釈することができる．

A が微分可能多様体 X 上の微分可能な関数の作る環であり，$\mathfrak{M}$ が $x_0 \in M$ で 0 になる関数からなるものとすれば，同じ状況が成り立っている．またも，T_{x_0} を点 x_0 の接空間として，$\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \cong T_{x_0}^*$ が得られ，この同型は

$$\ell(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0) \qquad (\xi \in T_{x_0},\ \ell \equiv f \pmod{\mathfrak{M}^2}) \tag{2}$$

によって与えられる．ここまでの議論では，すでに微分可能多様体の接空間の定義を知っているものと仮定していたのだが，議論を逆にして接空間の定義を

$$T_{x_0} = \left(\mathfrak{M}_{x_0}/\mathfrak{M}_{x_0}^2\right)^* \tag{3}$$

とすることができる．こうすると $\xi \in T_{x_0}$ は，定義により，$\mathfrak{M}_{x_0}^2$ 上で 0 になる $\mathfrak{M}_{x_0}$ 上の線形関数 ℓ であるということになる．ℓ を定数上では 0 になると定義しておけば，A 全体の上の関数が得られる．容易にわかるように，ℓ に対する条件は

$$\begin{cases} \ell(\alpha f + \beta g) = \alpha\ell(f) + \beta\ell(g), \\ \ell(fg) = \ell(f)g(x_0) + \ell(g)f(x_0) \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in A) \tag{4}$$

と書くことができる．「それに関して関数が微分できるようにするもの（(2) でのように）」という，接ベクトルの直観的な概念が，こういう形で公理化されるのである．関係式 (3) やそれと同値な条件 (4) が与えているのは，おそら

く微分可能多様体の1点での接空間の定義として最も本来的な[1]ものだろう．

これに関連して，微分可能多様体上のベクトル場の概念を考えるのが自然である．定義により，ベクトル場 θ は任意の点 $x \in X$ に対してベクトル $\theta(x) \in T_x$ を与えるものである．任意の関数 $f \in A$ と点 $x \in X$ に対して，ベクトル $\theta(x)$ は数 $\theta(x)(f)$ を，つまり関数 $g(x) = \theta(x)(f)$ を与える．この作用素を $\mathcal{D}(f)$ と書く．関係式 (4) から，$\mathcal{D}$ が

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\alpha f + \beta g) &= \alpha\mathcal{D}(f) + \beta\mathcal{D}(g), \\ \mathcal{D}(fg) &= f\mathcal{D}(g) + \mathcal{D}(f)g \end{aligned} \tag{5}$$

を満たすことがわかる．このような作用素を **1 階線形微分作用素**と言う．座標系 $(x_1, \dots, x_n)$ では，容易にわかるように，$a_i = \mathcal{D}(x_i)$ と置くと，これを

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{6}$$

と書くことができる．逆に，性質 (5) を満たす作用素 $\mathcal{D}$ は

$$\theta(x)(f) = \mathcal{D}(f)(x)$$

という式によって，ベクトル場 θ を定める．

任意の環 A に対して，A の**微分**とは，写像 $\mathcal{D}: A \to A$ で，

$$\mathcal{D}(a+b) = \mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b),$$

$$\mathcal{D}(ab) = a\mathcal{D}(b) + \mathcal{D}(a)b$$

を満たすもののことである．もし $B \subset A$ が部分環であれば，$b \in B$ に対して $\mathcal{D}(b) = 0$ を満たすとき，$\mathcal{D}$ を A の B 上の微分と言う．そのとき，$a \in A$, $b \in B$ に対して $\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(a)b$ となる．もし

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)(a) &= \mathcal{D}_1(a) + \mathcal{D}_2(a), \\ (c\mathcal{D})(a) &= c\mathcal{D}(a) \end{aligned} \qquad (a, c \in A)$$

と置けば，B 上の A の微分全体は A 加群をなす．

---

[1] ［訳註］ここでも直訳すると「最も不変な定義」という言葉が使われているが，それは定義の不定性を排除したという意味である．多くの場合，座標のような本質的ではないが理解しやすいものを使って定義するが，実はその取り方によらないことを後で示すという手順を踏む．

こうして，微分可能多様体 X 上のベクトル場の作る加群は，定義により，X 上の微分可能関数の作る環の体 $\mathbb{R}$ 上の微分全体の作る加群である，と言うことができる．§5 の例 13 と例 12 での議論と合わせると，今や，多様体上のベクトル場，微分 1 形式，微分 r 形式という基本概念すべての代数的な定義が得られたことになる．

さて，任意の可換環に戻ろう．§4 で定式化した一般的な考え方によれば，任意の可換環 A の元がある「空間」上の関数であり，その空間の点が環 A の極大イデアル（素イデアルとするという場合もある）であり，準同型 $A \to A/\mathfrak{M}$ が極大イデアル $\mathfrak{M}$ に対応する「点」における「関数」$a \in A$ の値を定める，と考えることができる．ここで，各「点」に「接空間」を指定することによって，この関連性をより深いものにすることができる．このために,「点」を定める極大イデアル $\mathfrak{M}$ とその商空間 $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ を考える．$k = A/\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{M}$ に対応する「点」での「値」のなす「体」としよう．$m \in \mathfrak{M}$, $a \in A$ という元に対して，am の $\mathfrak{M}^2$ を法とする剰余類は，a の $\mathfrak{M}$ を法とする剰余類にしか，つまり，a が定める k の元にしかよらない．このことから，$\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ が k 上のベクトル空間であることがわかる．その双対ベクトル空間，つまり，$\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ 上の k 値線形関数の全体はイデアル $\mathfrak{M}$ に対応する「点」での接空間のアナロジーになっている．

この見方は，色々な幾何学的なまた代数学的な状況を解析する際に役立つ．たとえば，既約な代数曲線 C が方程式 $F(x,y) = 0$ によって与えられていれば，点 $(a,b) \in C$ に対して，接空間は

$$F'_x(a,b)(x-a) + F'_y(a,b)(y-b) = 0$$

という方程式で与えられる．これは，$F'_x(a,b) = F'_y(a,b) = 0$ を満たす点以外のすべての点 $(a,b) \in C$ で，1 次元である．この 2 つの等式を満たす C の点を**特異点**と言い，そうでないとき**非特異点**または**単純点**と言う．特異点の数が有限個であることは容易にわかる．接空間の次元は，非特異点に対しては 1（つまり C と同じ次元）で，特異点に対してはより大きい（つまり 2 次元である）ことがわかる．同様の状況がより一般な代数多様体に対して成り立つ．つまり，接空間の次元は，ある代数的な真部分多様体の点を除くすべての点で同じであり，その部分多様体の点では値が跳ね上がる．これで与

えられるのは，第 1 に，既約な代数多様体の次元の新しい特徴付け（ある真部分多様体の点を除くすべての点での接空間の次元として）であり，第 2 に，特異点の識別（この真部分多様体の点として）であり，第 3 に，特異点の重要な不変量（接空間の次元の大きくなり方）である．しかし，おそらく何より重要なことは，これらの概念が必ずしも幾何的な起源を持たない任意の環に適用できることであり，その研究に幾何的直観を使う可能性を与えることだろう．たとえば，整数環 $\mathbb{Z}$ の極大イデアルは素数によって記述されるが，$\mathfrak{M}=(p)$ に対して，$\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ は $\mathbb{F}_p$ 上の 1 次元ベクトル空間であり，したがってここでは特異点は現れない．

例 2. $a+b\sigma$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ という元からなり，$\sigma^2=1$ という条件に基づいて通常のように演算を定義した環 A を考える（後にこの環は，位数 2 の群の表現の算術的な性質と関係して登場する）．その極大イデアルは次のように述べられる．任意の素数 $p\neq 2$ に対して，

$$\mathfrak{M}'_p=\{a+b\sigma \mid p \text{ は } a+b \text{ を割り切る }\}$$

と

$$\mathfrak{M}''_p=\{a+b\sigma \mid p \text{ は } a-b \text{ を割り切る }\}$$

という 2 つの極大イデアルがある．明らかに，$\mathfrak{M}'_p=(p,1-\sigma)$ かつ $\mathfrak{M}''_p=(p,1+\sigma)$ である．どちらに対しても，$\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ は $\mathbb{F}_p$ 上の 1 次元ベクトル空間である．さらに別の極大イデアル

$$\mathfrak{M}_2=\{a+b\sigma \mid a \text{ と } b \text{ の偶奇が等しい }\}=(2,1+\sigma)$$

がある．$\mathfrak{M}_2^2=(4,2+2\sigma)$ であり，$\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_2^2$ は，0, 2, $1+\sigma$, $3+\sigma$ という元の剰余類である 4 つの元からなっている．こうして，$\mathbb{F}_2$ 上の 2 次元ベクトル空間が得られる．イデアル $\mathfrak{M}_2$ はただ 1 つの特異点に対応している．

これまで考えてきたことは,「2 次の無限小を除いた」量を考えるということに結びついており，任意の環 A とその極大イデアル $\mathfrak{M}$ に対して環 $A/\mathfrak{M}^2$ を考えるということに帰着するものである．もちろん,「r 次の無限小を除いた」量を考えるということも可能で，このとき環は $A/\mathfrak{M}^r$ となる．たとえば，A が多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ とか，変数 $z_1,\ldots,z_n$ の原点で解析的

な関数の環とか，n 変数の複素数値 C^∞ 関数の環とかであって，$\mathfrak{M}$ を原点 $O=(0,\dots,0)$ で 0 になる関数の作るイデアルとすれば，$A/\mathfrak{M}^r$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間である．これはすでに考察した $A/\mathfrak{M}^2$ を一般化したもので，$r-1$ 次のジェット空間と呼ぶ．

例 3. 階数 >1 の微分作用素． 微分可能多様体 X 上の次数 $\le r$ の線形微分作用素は，形式的には，X 上の微分可能関数の作る環 A からそれ自身への $\mathbb{R}$ 線形写像 $\mathcal{D}:A\to A$ であって，任意の関数 $g\in A$ に対し，作用素 $\mathcal{D}_1(f)=\mathcal{D}(gf)-g\mathcal{D}(f)$ の次数が $\le r-1$ であるものとして定義することができる．1 階の作用素を定義する式 (5) から，$\mathcal{D}(gf)-g\mathcal{D}(f)$ がある関数（つまり $\mathcal{D}(g)$）を掛けるという作用素，つまり 0 階であることがわかる．逆に，もし $\tilde{\mathcal{D}}(gf)-g\tilde{\mathcal{D}}(f)$ がある関数を掛けるということなら，容易に確かめられるように，ある 1 階の作用素 $\mathcal{D}$ に対して $\tilde{\mathcal{D}}(f)=\mathcal{D}(f)+\tilde{\mathcal{D}}(1)f$ となる．

定義から，帰納法によって，もし作用素 $\mathcal{D}$ の次数が $\le r$ ならば，$\mathcal{D}(\mathfrak{M}_{x_0}^{r+1})\subset\mathfrak{M}_{x_0}$ となることがわかる．ここで，$\mathfrak{M}_{x_0}\subset A$ は点 $x_0\in X$ に対応する極大イデアルである．つまり座標で言えば，$\mathcal{D}(f)(x_0)$ は，f の $\le r$ 次の偏導関数の x_0 での値にしかよらないということであり，言い換えれば，

$$\mathcal{D}(f)=\sum_{i_1+\cdots+i_n\le r} a_{i_1\cdots i_n}(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}\qquad (a_{i_1\cdots i_n}\in A)$$

と書かれる．

任意の点 $x_0\in X$ に対して，1 階の線形微分作用素が $\mathfrak{M}_{x_0}/\mathfrak{M}_{x_0}^2$ 上の線形関数を定めたのと全く同じように，写像 $f(x)\mapsto\mathcal{D}(f)(x_0)$ は，r 次のジェット空間上の線形関数 ℓ を，つまり元 $\ell\in(A/\mathfrak{M}^r)^*$ を定める．

しかし，環 A を「極大イデアル $\mathfrak{M}$ の近傍で」研究するためのもっと厳密な道具が，環 $A/\mathfrak{M}^n$ $(n=1,2,3,\dots)$ をすべて同時に考えることで得られる．これらすべてを 1 つにまとめると，$A/\mathfrak{M}^n$ の**射影極限**と呼ばれる 1 つの環 $\hat{A}$ を得ることができる．このために，$\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ を核とする標準準同型 $\varphi_n:A/\mathfrak{M}^{n+1}\to A/\mathfrak{M}^n$ が存在することに注意する．環 $\hat{A}$ は，$\varphi_n(\alpha_{n+1})=\alpha_n$ を満たすという意味で同調する元の列 $\{\alpha_n\in A/\mathfrak{M}^n \mid n\ge 1\}$ の作る集合として定義される．列に対する演算は，元ごとの演算で定義される．各元

$a \in A$ は $\alpha_n = a + \mathfrak{M}^n$ と置くことでそのような列を定め，こうして準同型 $\varphi : A \to \hat{A}$ が得られる．φ の核はすべてのイデアル $\mathfrak{M}^n$ の共通部分である．多くの興味ある場合には，この共通部分は 0 であり，したがって A は部分環として $\hat{A}$ に埋め込まれる．

例 4. $A = K[x]$, $\mathfrak{M} = (x)$ とする．環 $K[x]/(x^n)$ の元 α_n は多項式

$$f_n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

によって一意的に決定され，元の列 $\{\alpha_n\}$ は，α_{n+1} を表わす多項式 f_{n+1} が f_n から n 次の項を付加して得られるならば，同調している．列の全体はこうして無限の（形式的）ベキ級数を定める．言い換えれば，環 $\hat{A}$ は §3 例 6 の形式的ベキ級数環 $K[[x]]$ と同型である．包含写像 $\varphi : K[x] \to K[[x]]$ は商体の包含写像 $\varphi : K(x) \to K((x))$ に拡張される．ここで，$K((x))$ は形式的ローラン級数体（§2 例 5 参照）である．この包含写像が，有理関数を点 $x = 0$ でローラン級数に展開することと同じであることが容易にわかる．特に，関数が $x = 0$ で極を持たなければ，それはテイラー展開に一致する．たとえば，$f(x) = 1/(1-x)$ であれば，$f(x) \equiv 1 + x + \cdots + x^{n-1} \pmod{x^n}$ となる．言い換えれば，関数 $f(x) - 1 - x - \cdots - x^{n-1}$ は x で割り切れる分母を持たず，分子は x^n で割り切れる．つまり，$f(x)$ は級数 $1 + x + x^2 + \cdots$ に対応するのである．

例 5. $A = K[C]$ を任意の代数多様体 C の座標環とする．$\mathfrak{M}_c$ が非特異点 $c \in C$ に対応する環 A の極大イデアルであれば，$\hat{A}$ は形式的ベキ級数環 $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ に同型である．ここで，n は C の次元である（前に議論したどの次元の概念で考えてもよい）．さらに，包含写像

$$K[C] \to K[[x_1, \ldots, x_n]]$$

は，$K(C)$ に属する c で有限な関数に，つまり，$P, Q \in K[C]$, $Q(c) \neq 0$ があって P/Q と表わすことができるような関数に拡張される．これは，そのような関数の形式的ベキ級数としての表現を考えている．体 K が複素数体 $\mathbb{C}$ か実数体 $\mathbb{R}$ であれば，対応する関数が $x_1, \ldots, x_n$ の十分小さな値に対して収束することを証明することができる．このようにして，特異点を持たな

い代数多様体が位相多様体でも，可微分多様体でも，解析多様体でもあることが証明される．

例 6. A を $x=0$ の近傍で無限回微分可能な関数の環とし，I を $x=0$ で 0 になる関数の作るイデアルとする．そのとき，I^n は，次数 $<n$ のすべての導関数が $x=0$ で 0 になるような関数の作るイデアルになる．A/I^n は環 $\mathbb{R}[x]/(x^n)$ であり，準同型 $A \to \mathbb{R}[x]/(x^n)$ は関数のテイラー展開によって与えられる．この場合，$\bigcap I^n \neq 0$ である．なぜなら，$x=0$ ですべての導関数が 0 になるような，0 でない C^∞ 関数が存在するからである．準同型 $A \to \hat{A}$ は各関数を形式的テイラー級数に展開することになる．**E. ボレルの定理**により，すべての導関数が $x=0$ であらかじめ与えた値をとるような C^∞ 関数が存在するので，$\hat{A} \cong \mathbb{R}[[t]]$ である．

しかし，同じアイデアを完全に異なる性質の環に適用することも可能である．

例 7. $A=\mathbb{Z}$ を整数環，p を素数として $\mathfrak{M}=(p)$ とすれば，$\hat{A}$ として，**p 進整数環**と呼ばれる環 $\mathbb{Z}_p$ が得られる．上で考察した環 $K[x]$ の場合のアナロジーによって，環 $\mathbb{Z}_p$ の元が

$$\alpha_n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1}$$

の形の整数の列 $\{\alpha_n\}$ として与えられることがわかる．ここで，a_i は $\operatorname{mod} p$ の剰余類の固定した代表系に属するように（$0 \le a_i < p$ と）してあり，α_{n+1} は α_n から $a_n p^n$ の形の項をつけ加えて得られる．この列は形式的ベキ級数

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$$

の形に書き下すことができる．級数に対する演算は，p 進法で書かれた整数に関する演算と全く同じようにして行われる．つまり，もし計算した結果，係数 a_i が $c>p$ という数になったなら，c を整数として p で割って，つまり $c=c_0+c_1p$ として，「c_1 を次の桁に繰り上げる」のである．環 $\mathbb{Z}_p$ は整域で，その商体 $\mathbb{Q}_p$ が **p 進数体**である．包含写像 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ は，包含写像 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ に拡張される．

上に述べた構成の間の関係をもっと包括的に見るために，環 $K[x]$ と体

$K(x)$ の例に戻ることにする．関数 $f \in K(x)$, $f \neq 0$ が $x=0$ で与えられた次数の無限小であることをより厳密に数値的に特徴付けるために，f の**指数** $\nu(f)$ を導入する．点 0 で f が次数 $n>0$ の零点を持つとき $\nu(f)=n$ とし，次数 $n>0$ の極を持つとき $\nu(f)=-n$ とする．実数 $c\ (0<c<1)$ を（たとえば $c=\frac{1}{2}$ と）固定し，$f \neq 0$ に対しては $\varphi(f)=c^{\nu(f)}$ とおき，また $\varphi(0)=0$ と置く[2]．すると，$x=0$ で f が高次の無限小であれば，$\varphi(f)$ は小さくなる．今導入した $\varphi(f)$ は，有理数や実数や複素数の絶対値が持っている形式的な性質を満たしている．つまり，$\varphi(f)=0$ は $f=0$ と同値であり，

$$\varphi(fg)=\varphi(f)\varphi(g), \qquad \varphi(f+g) \leq \varphi(f)+\varphi(g) \tag{7}$$

が成り立つ．この 3 つの性質を持つ実数値関数 φ を持つ体 L を**ノルム体**と言い，関数 φ を**ノルム**または**付値**と言う．ノルム体の最も簡単な例は有理数体 $\mathbb{Q}$ で，付値は $\varphi(x)=|x|$ である．コーシーが基本列（コーシー列とも言う）を使って有理数から実数を構成した手続きは，任意のノルム体の場合に移し変えることができる．こうして新しいノルム体 $\hat{L}$ が得られる．その中に L が部分体として付値を保って埋め込まれ，L の像は至る所稠密になっている．そして $\hat{L}$ は（その付値の意味で）完備である．つまり，コーシー列が収束するという判定条件を満たしている．この $\hat{L}$ を，付値 φ に関する体 L の**完備化**と言う．

非常に容易に確かめられることだが，この一般的な構成を上に導入した付値 $\varphi(f)=c^{\nu(f)}$ の場合に適用すれば，体 $K((x))$ と埋め込み $K(x) \to K((x))$ の構成が得られる．今や，体 $\widehat{K(x)}=K((x))$ に体 $K(x)$ の付値 φ の拡張である付値が存在するということを使うことができる．この付値が何かは容易にわかる．つまり，$f \in K((x))$, $f \neq 0$ かつ

$$f=c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1}+\cdots \qquad (c_n \neq 0)$$

のときに $\varphi(f)=c^n$ であり，$\varphi(0)=0$ である．しかしノルム体では級数の収束を論じることに意味があり，どんな形式的ローラン級数もこの意味で収

[2] ［訳註］もちろん「$f=$ 定数」のときは，$\nu(f)=0$, $\varphi(f)=1$ と置く．

束している．(特に，$n \to \infty$ のとき，このノルムの意味で $x^n \to 0$ である.) 有理関数をローラン展開すると，f が f に収束する級数の和に等しいという，体 $\widehat{K(x)} = K((x))$ の中で意味を持つ等式が得られる．

これに関連して，全く一般に，体 $K(x)$ にどのような付値が定義できるかを決定することは興味深い．複素数体 $K = \mathbb{C}$ の場合に制限して，条件 (7) にさらに

$$\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{かつ} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{ならば} \qquad \varphi(\alpha) = 1 \tag{8}$$

という条件をつけ加えて，付値の概念を強めることにする．明らかに，上に構成した付値 $\varphi(f) = c^{\nu(f)}$ はこの付加条件を満たしている．もちろん，上の構成を変えて，$x = 0$ の代わりに $x = \alpha$ を考えて，つまり，$x = \alpha$ における関数 f の零点や極の次数として $\nu(f)$ を考えることもできる．こうして得られた付値を φ_α と書く．また，無限遠点における関数の零点や極の次数を考えることによって，同様な付値をもう 1 つ考えることができる．この付値を φ_∞ と書く．φ_∞ を定義するには，P, Q がそれぞれ n, m 次の多項式で，$f = \dfrac{P}{Q}$ と書かれる場合に，$\varphi_\infty(f) = c^{m-n}$ と置くのが簡単である（もちろん $\varphi_\infty(0) = 0$ ）．

これらの付値が，$\mathbb{C}(x)$ の付値のすべてを尽くすことを見るのは難しくない．

定理 I. 体 $\mathbb{C}(x)$ の（付加条件 (8) も満たす）すべての付値は，付値 φ_α ($\alpha \in \mathbb{C}$) と付値 φ_∞ によって与えられる．

こうして，$\mathbb{C}(x)$ の付値は，その上に有理関数が定義されている，(無限遠点も含む）直線，つまりリーマン球面のすべての点を，非常に自然な仕方で与えてくれる．

そこで，$\mathbb{C}(x)$ の有限拡大に対して同じ問題を考えてみる．これらは，C をある既約な曲線として，$\mathbb{C}(C)$ という形をしている．答は似たようなものになるが，多少微妙な点が加わる．曲線 C の非特異点 c はそれぞれある付値 φ_c に対応するが，それらはたとえば $\varphi_c(f) < 1$ と $f(c) = 0$ とが同値になるという事実によって特徴付けられる．しかし，その他に有限個の付値がつけ加えられることになる．まず，曲線 C の無限遠点がある（これは，曲線を射影平面の中で考えているときに起こる）．第 2 には，C の特異点はいくつかの

異なる付値に対応するかも知れない．付値全体の集合は，ある射影空間の中にある非特異な曲線で，同じ体 $\mathbb{C}(C)$ を定義するものの点と 1 対 1 に対応している．これを曲線 C の**非特異射影モデル**と言う．したがって，このモデルの点は，非常に際だった仕方で，体 $\mathbb{C}(C)$ によって極めて不変的に特徴付けられている．これには別の定式化もある．もし曲線 C が方程式 $F(x,y)=0$ によって定義されていれば，体 $\mathbb{C}(C)$ のすべての付値は，x の解析関数としての y のリーマン面の点と 1 対 1 に対応するのである．これは，代数関数のリーマン面の純代数的な記述であると考えることができる．

$\xi=(a,b)$ を方程式 $F(x,y)=0$ によって定義される代数曲線 C のある点とし，φ を ξ に対応する付値の 1 つとする．そのとき付値 φ に関する体 $\mathbb{C}(C)$ の完備化はまた，形式的ローラン級数体 $\mathbb{C}((t))$ に同型となる．包含写像 $\mathbb{C}(C)\subset\mathbb{C}((t))$ のもとで

$$x-a=c_kt^k+c_{k+1}t^{k+1}+\cdots \qquad (c_k\neq 0)$$

であるとする．すると，$x-a=t^kf(t)$ $(f(0)\neq 0)$ となるので，

$$x-a=\tau^k,\qquad \tau=tf(t)^{1/k}$$

となる．この $f(t)^{1/k}$ は形式的ベキ級数として理解されねばならず，$f(0)\neq 0$ という条件からこうすることには意味がある．t と同じように，τ が体 $\mathbb{C}((t))$ の「パラメータ」であることを示すのは易しい．その意味は，$\mathbb{C}((t))$ のすべての元が τ のローラン級数としても表わすことができるということで，つまり $\mathbb{C}((t))=\mathbb{C}((\tau))$ となる．特に，

$$y=\sum d_i\tau^i=\sum d_i(x-a)^{i/k}$$

である．$x-a$ に関する分数ベキ級数としての，代数関数 y のこのような展開を**ピュイズー級数**と言う．

さて，有理数体 $\mathbb{Q}$ に移ろう．p を素数とし，c $(0<c<1)$ を実数とする．n を割る p の最大ベキを $\nu(n)$ と書き，有理数 $a=\dfrac{n}{m}$ $(n,m\in\mathbb{Z})$ に対しては

$$\varphi_p(a)=c^{\nu(n)-\nu(m)}$$

と置く．φ_p が有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の付値であることは容易に確かめられる．この

付値に関する $\mathbb{Q}$ の完備化を考えると，以前に導入した p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ が得られる．この体では，級数の収束の概念に意味があり，p 進数を与えるのに使った形式的ベキ級数は収束する．たとえば，

$$\frac{1}{1-p} = 1 + p + p^2 + \cdots$$

という等式は，左辺の数が右辺の収束ベキ級数の和であるという意味を持っている．

体 $\mathbb{C}(x)$ のアナロジーとして,「体 $\mathbb{Q}$ のすべての付値は何か？」という問題を考えることは自然なことである．

定理 II．オストロフスキーの定理．体 $\mathbb{Q}$ のすべての付値は，p 進付値 φ_p であるか,（c を $0 < c < 1$ を満たす実数として）$\varphi(a) = |a|^c$ の形の付値かのどちらかである．

ここでの数 c は，p 進付値や $\mathbb{C}(x)$ の付値 φ_α の定義に現れている数と全く同じように，本質的でないパラメータである．別の c を選んで得られる付値も，同じ収束の概念を定め，同型な完備化を定める．付値 $|\ \ |^c$ に関する完備化は，もちろん実数体を与えている．このように，すべての p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ と実数体 $\mathbb{R}$ は全く同じような役割をしているのである．体 $\mathbb{C}(x)$ と比較するなら,（体 $\mathbb{Q}_p$ を定める）素数 p は有限の点 $x = \alpha$ のアナロジーで，包含写像 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ は有限点でのローラン級数展開のアナロジーである．それから，包含写像 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ は無限遠点でのローラン級数展開のアナロジーである．このことによって，整数（と有理数）の，可除性と大きさという 2 つのタイプの性質に対する統一的な観点が得られる．たとえば，$f \in \mathbb{Z}[x]$ に対して，方程式 $f(x) = 0$ が実根を持つという事実は，$|f(a_n)|$ が任意に小さくなるような有理数 a_n が存在することを意味している．同じように，方程式 $f(x) = 0$ が p 進体の中で解くことができるという事実は，$\varphi_p(f(a_n))$ が任意に小さくなる，つまり，$f(a_n)$ が p のすべての大きいベキで割ることができるような有理数 a_n が存在することを意味している．多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，方程式

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

が体 $\mathbb{Q}_p$ の中で解を持つことと，任意の k に対して合同式

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^k}$$

が解を持つこととが同値であることを示すことができる．任意の法に関する合同が $\bmod p^k$ に関する合同に帰着するので，方程式 $f = 0$ がすべての体 $\mathbb{Q}_p$ で解を持つことは，任意の法 N に関して

$$f \equiv 0 \pmod{N}$$

が解を持つことと同値である．たとえば，次の定理は整数論の古典的な結果である．

定理 III. ルジャンドルの定理．方程式

$$ax^2 + by^2 = c \qquad (a, b, c \in \mathbb{Z},\ c > 0)$$

が有理数の解を持つことは，以下の条件と同値である．

1. $a > 0$ または $b > 0$.
2. すべての N に対して合同式 $ax^2 + by^2 \equiv c \pmod{N}$ が解を持つ．

上に述べたことにより，これは，方程式 $ax^2 + by^2 = c$ が有理数の解を持つことと，$\mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{R}$ のどの体でも解を持つこととが同値であることを意味している．

この結果は次のように一般化できる．

定理 IV. ミンコフスキー–ハッセの定理．f を有理係数の **2** 次形式で，$c \in \mathbb{Q}$ とするとき，方程式

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c$$

が $\mathbb{Q}$ の中で解を持つことと，すべての体 $\mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{R}$ で解を持つこととは同値である．

p 進数体は有理数体の算術的な性質（p のベキで割れること）を反映しているが，一方で体 $\mathbb{R}$ と共通な一連の性質を持っている．$\mathbb{Q}_p$ において，測度，

積分，解析関数，補間などを考えることができる．これは強力な整数論的な方法を与え，(特にすべての体 $\mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{R}$ を同時に考えるなら) それによって多くの深い算術的な結果が得られている．

最後に，$\mathbb{Q}$ の有限拡大体 K を考えよう．このタイプの体は**代数的数体**と呼ばれる．K 上にはどんな付値が存在するだろうか？ あらゆる付値は $\mathbb{Q}$ のある付値を導くし，また $\mathbb{Q}$ の任意の付値が K の有限個の付値から導かれることを示すことができる．$\mathbb{Q}$ 上の絶対値（という付値）$|a|$ を導く付値は，体 K の実数体 $\mathbb{R}$ や複素数体 $\mathbb{C}$ への埋め込みと，これらの体上の関数 $|x|$ に関係している．他の付値を考えよう．体 $\mathbb{Q}$ において，部分環 $\mathbb{Z}$ は，すべての p に対する $\varphi_p(a) \leq 1$ という条件によって取り分けられる．このアナロジーとして，素数 p に対する体 $\mathbb{Q}$ の付値 φ_p を導く K の付値のすべてに対して，$\varphi(a) \leq 1$ を満たす K の元を考える．容易にわかることだが，これらの元はある環 A をなし，A は K の**整数環**の役割をする．そこで A の元を**代数的整数**と呼ぶ．($\alpha \in K$ が代数的整数であることと，ある方程式

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z})$$

を満たすことが同値であることを示すことができ，この方を代数的整数の定義にすることが多い.) A の商体は K になる．明らかに $A \supset \mathbb{Z}$ である．A が $\mathbb{Z}$ 上の自由加群で，ランクが拡大 $K/\mathbb{Q}$ の次数 $[K : \mathbb{Q}]$ に等しいことを証明することができる．環 A は一般には素元分解環ではないが，イデアルが素イデアルの積に一意的に分解されるという定理は A でも成り立つ．特に，どんな素イデアル $\mathfrak{p}$ と元 $\alpha \in A$ に対しても，$\mathfrak{p}$ のいくつのベキが主イデアル (α) を割るかを示す，指数 $\nu(\alpha)$ が定義される．実数 c $(0 < c < 1)$ を選び，任意の元

$$\xi \in K,\ \xi \neq 0,\ \xi = \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha, \beta \in A$$

に対して，

$$\varphi_{\mathfrak{p}}(\xi) = c^{\nu(\alpha)-\nu(\beta)}$$

と置く．こうして，環 A の各素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して付値 $\varphi_{\mathfrak{p}}$ が与えられる．実はこれらの付値が，体 $\mathbb{Q}$ の付値 φ_p を導くような体 K のすべての付値を尽くしていることがわかる．これらの事実が代数的数体の算術の第 1 段階を

なしている．代数曲線 C に対する体 $\mathbb{C}(C)$ との関係でこれまで議論してきた類似の事実とこれらのことを比較すると，代数的数体の算術と代数曲線の幾何（つまり対応するリーマン面の性質）とを平行して述べていけることが見てとれる．これは，§4 で議論した数の「関数的」観点のより進んだ実現になっている（§4 例 3 の後の注意を参照）．

§ 8.　非可換環

有限次元ベクトル空間の線形変換の集合には，和と積という 2 つの演算がある．線形変換を行列の言葉で書けば，これらの演算は行列の演算に変換することができる．この **2** つの演算の存在はきわめて重要であり，常時用いられる．たとえばこのことだけから，線形作用素の多項式を定義することができ，それらは，とりわけ，線形変換の構造で，極小多項式の根の重複度に本質的に依存するようなものの研究に用いられる．この 2 つの演算と極限移行とから，(実または複素) 行列の解析関数を定義することができるようになる．たとえば，

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

であり，これによって，n 個の未知関数に関する n 個の定数係数 1 階線形常微分方程式系を

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

の形に書き下せば（ただし，x は未知関数の作るベクトルで，A は係数行列として），x_0 を初期データのベクトルとして，解を $x(t) = e^{At}x_0$ の形に書くことができるようになる．線形変換の和と積の演算は，積の可換性を除いた，可換環の全ての公理を満たす．可換環の定義からこの要請を省くなら，この新しい概念の名前からも「可換」という形容詞を省くことになる．

こうして，環とは，

$$\begin{aligned} a+b &= b+a, \\ a+(b+c) &= (a+b)+c, \\ (ab)c &= a(bc), \end{aligned}$$

$$a(b+c) = ab+ac,$$
$$(b+c)a = ba+ca$$

という条件を満たす，和と積の演算を持つ集合のことである．

すべての a に対して $a+0=a=0+a$ を満たす元 0 が存在し，任意の a に対して $a+(-a)=0$ を満たす元 $-a$ が存在する．すべての a に対して $1\cdot a=a=a\cdot 1$ を満たす元 1 が存在する[1]．

（可換環の例はすでに考察したので，非可換な）環の例をいくつか挙げることにしよう．

例 1. ベクトル空間 L の線形変換の環と，その自然な一般化である，可換環 A 上の加群 M から自分自身への準同型全体のなす環．加群から自分自身への準同型を**自己準同型**と言い，上で定義した環を $\mathrm{End}_A(M)$ と書く．もし $A=K$ が体ならば，ベクトル空間 L の線形変換の環が得られ，以降これもまた $\mathrm{End}_K(L)$ と書く．

例 2. 線形変換の環の最も簡単な無限次元のアナロジーは，バナッハ空間の有界線形作用素の作る環である．

例 3. 1 変数または n 変数の線形微分作用素で，係数が多項式，または解析関数，または C^∞ 関数，または形式的ベキ級数（もちろん同じ数の変数の）であるものの作る環．

これ以上の例を考えていく前に，可換環のために導入した概念だが，実際には可換性を使わなかったものを注意しておこう．それは，**同型**，**準同型**，**準同型の核と像**，**部分環**，**次数つき環**である．

たとえば，体 K 上の n 次元ベクトル空間 L の基底を選ぶことで，環 $\mathrm{End}_K(L)$ と n 次正方行列全体の環 $M_n(K)$ との同型が定まる．

環 R において，R のすべての元と可換な元 a（つまり，すべての $x\in R$ に対して $ax=xa$ を満たす元）の全体は，R の**中心**と呼ばれる部分環をなし，$Z(R)$ と書かれる．

---

[1] ［訳註］もちろんここまで要請するのが環の定義である．

環 R の中心がある部分環 A を含むとき，R は A 代数または A 上の代数と呼ばれる．R の中の積を忘れて，R の元と A の元との掛け算だけを考えることにすると，R は A 加群になる．可換環 A 上の 2 つの代数の準同型の概念は，通常の環準同型の概念とは，A の各元がそれ自身に写ることを要求することだけ異なっているもので，つまり，対応する A 加群の準同型を定めるようにしている．A 代数 R の部分代数の概念も同じように定義され，つまり，A を含む部分環とする．

$A = K$ が体で R が K 上の代数であれば，K 上のベクトル空間としての R の次元を代数 R の**ランク**と言う．この概念はすでに出てきている．有限拡大 L/K は有限ランクの代数になっている拡大である．体 K 上有限ランク n の代数は，定義によって，基底 $e_1, \ldots, e_n$ を持っており，代数における積はこの基底の元の積によって定まる．e_ie_j はまたこの代数の元だから，

$$e_ie_j = \sum c_{ijk}e_k \qquad (c_{ijk} \in K) \tag{1}$$

の形に書くことができる．これらの元 c_{ijk} は**代数の構造定数**と呼ばれ，代数における積を

$$\left(\sum a_ie_i\right)\left(\sum b_je_j\right) = \sum a_ib_jc_{ijk}e_k$$

という式で定める．関係式 (1) は代数の乗積表と呼ばれることがある．もちろん，構造定数は任意に与えるというわけにはいかない．積が結合律を満たし，単位元が存在するという要請を反映する条件を満たさなければならないからである．

たとえば，全行列環 $M_n(K)$ は体 K 上ランク n^2 の代数である．基底としては，n^2 個の元 E_{ij} をとることができる．ここで，E_{ij} は第 i 行第 j 列の成分だけが 1 で残りはすべて 0 であるような行列である．構造定数は

$$\begin{aligned} &E_{ij}E_{k\ell} = 0 \qquad (j \neq k \text{ のとき}), \\ &E_{ij}E_{j\ell} = E_{i\ell} \end{aligned} \tag{2}$$

によって与えられる．

さて，体上の代数として簡単に与えられる環の例を，さらにいくつか紹介できるようになった．

例 4. G を有限群とする（この概念が読者にとって既知としているが，そうでなければ§12 を参照のこと）．体 K 上の代数を次のように構成する．群の元を添え字に持つ基底ベクトル e_g $(g \in G)$ をとり，それらの積を群の元の積と同様に

$$e_{g_1} e_{g_2} = e_{g_1 g_2}$$

とする．こうして得られた代数を群 G の群環[2]と呼び，$K[G]$ と書く．同じようにして，可換環 A 上の有限群 G の群環 $A[G]$ を定義することができる．群の元 $g \in G$ を対応する基底の元 e_g と同一視することによって，$K[G]$ の元が $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ という和に書かれると考えることができる．積 $\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right)\left(\sum_{h \in G} \beta_h h\right)$ ももちろん同じ形 $\sum_{g \in G} \gamma_g g$ に書くことができ，容易に確かめられるように，

$$\gamma_g = \sum_{u \in G} \alpha_u \beta_{u^{-1} g} \tag{3}$$

となっている．元 $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ は係数で与えられるが，その係数は G 上の関数（の値）と見ることができ，そう見たとき $\alpha(g)$ と書く．そうすると，$K[G]$ の 1 つの解釈，つまり，G 上の関数の作る代数で，関数 $\alpha(g)$ と $\beta(g)$ に対して関数 $\gamma(g)$ を与えるという積（(3) 参照）

$$\gamma(g) = \sum_{u \in G} \alpha(u) \beta(u^{-1} g) \tag{4}$$

を持つものという解釈が得られる．この書き方は無限群への一般化のための出発点となる．たとえば，G が単位円 $|z| = 1$ で，G の元をその偏角 φ を使って書けば，G 上の関数はまさに周期 2π の φ の周期関数であることがわかる．式 (4) のアナロジーとして見ると，この群の群環は周期関数 $\alpha(\varphi)$（たとえば連続で絶対積分可能な関数として）の作る代数で，$\alpha(\varphi), \beta(\varphi)$ を関数

---

[2]［訳註］英語では group algebra となる用語が使われていて，直訳すれば「群代数」であるが，日本では「群環」という用語の方が多く使われている．耳に馴染みやすいこともあるが，欧米文献でも group ring と呼んでいた時代に定着したからでもある．またわざわざ分ける必要のないこと（例）も多く，「環」という名前を見たときに「代数ではない」と狭く考えない方がよいかも知れない．

$$\gamma(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t)\beta(\varphi - t)dt$$

に対応させるものとして積法則が定義される．解析学では，この操作は 2 つの関数のたたみ込み[3]と呼ばれる．

形式的な観点からは，この定義には 1 つの欠陥がある．つまり，この群環は単位元を持たないのである．単位元があるとすれば，群の単位元のデルタ関数になる．構成された代数 R に単位元を付加すれば，これは容易に克服することができる．つまり，$\mathbb{C} \oplus R$ を考えて，積を

$$(\alpha + x)(\beta + y) = \alpha\beta + (\alpha y + \beta x + xy)$$

とすればよい．

群環の概念を無限群に一般化するもう 1 つの方法は，関数の代わりに級数を考えることで，可算群に適用することができる．$\sum \alpha_g g$ $(\alpha_g \in \mathbb{C})$ の形の無限級数（たとえば絶対収束級数）を考え，積の法則は (3) で与える．

例 5. 最も有名な非可換環の例は**四元数体** $\mathbb{H}$ である[4]．これは実数体 $\mathbb{R}$ 上のランク 4 の代数で，$1, i, j, k$ を基底とし，積の法則が

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ ji = -k,\ jk = i,\ kj = -i,\ ki = j,\ ik = -j$$

で与えられるもののことである．つまり，i, j, k を図 10 のように円周上に描けば，2 つの隣り合った元を時計回りの順に掛けると 3 つ目の元が得られ，反時計回りに掛けると第 3 の元をマイナスにしたものが得られる．

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ の**絶対値**は数 $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ であり，q の**共役四元数**は $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ である．容易に確かめられるように，

$$q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2 \quad かつ \quad \overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1} \tag{5}$$

という関係式が成り立つ．これらのことから，$q \neq 0$ なら，四元数 $q^{-1} = \dfrac{1}{|q|^2}\bar{q}$

---

[3] ［訳註］合成積と呼ぶ分野もある．

[4] ［訳註］原書では「四元数代数」（英語なら quaternion algebra）という用語が使われている．例 6 の後の議論でもわかるように，可換性を持たない「体」を「可除代数」(division algebra) という言い方をすることも多い．その言葉遣いに準じれば「四元数代数」となるのだが，日本では「多元体」もしくは単に「体」と呼ぶことの方が多く，「四元数体」という用語の方が一般的である．

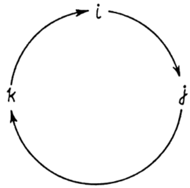


図 10

は q の逆数，つまり，$qq^{-1}=q^{-1}q=1$ となる．$q=a+bi+cj+dk$ であれば，a は q の実部，$bi+cj+dk$ は虚部と呼ばれ，それぞれ $\mathrm{Re}\,q$, $\mathrm{Im}\,q$ と書かれる．$a=0$ ならば q は純虚（四元）数と呼ばれる．この場合，3 次元のベクトル $x=(b,c,d)$ に対応している．2 つの純虚四元数の積は，3 次元ベクトルの 2 つの基礎的な代数的操作である，スカラー積 (x,y) とベクトル積 $[x,y]$ を使って表わすことができる．実際，純虚四元数 p, q がベクトル x, y と対応していれば，$\mathrm{Re}\,(pq)=(x,y)$ であり，$\mathrm{Im}\,(pq)$ はベクトル $[x,y]$ に対応している．

等式 (5) から，2 つの四元数 q_1, q_2 に対して $|q_1q_2|=|q_1||q_2|$ となることは容易にわかる．このことは，a,b,c,d と a_1,b_1,c_1,d_1 を任意の数とするとき，積

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)$$

が $a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2$ という形に書くことができることを意味している．ここで a_2,b_2,c_2,d_2（四元数 q_1q_2 における $1,i,j,k$ の係数）は，a,b,c,d と a_1,b_1,c_1,d_1 を使って非常に簡単に表わすことができる．結果として得られる等式は，ハミルトンによる四元数の導入よりもずっと前に，オイラーによって発見されている．これはたとえば，どんな自然数 n も 4 つの整数の平方の和になる，という有名な**ラグランジュの定理**の証明に用いられている[5]．この等式を使うと，問題がただちに素数 n の場合に帰着され，それはまた非可換環 $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i+\mathbb{Z}j+\mathbb{Z}k$ の算術に関係している．

例 6. 四元数は複素数体 $\mathbb{C}$ を $a+bi$ の形の元として含んでいる．どんな四

[5] ［訳註］多くの書物に載っているが，ヒンチン [122] の日本語訳に訳者が付した解説第 3 章 §5 に証明がある．

元数も，一意的に $z_1 + z_2 j$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$ の形に書くことができる．この表示

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \tag{6}$$

は四元数を表わす便利な方法を与えている．この形に書かれた四元数を扱うときには，$z \in \mathbb{C}$ と j が可換でないことを覚えておくだけでよい．しかしながら，その交換が

$$jz = \bar{z}j \tag{7}$$

という単純な規則に従っていることは容易に確かめられる．

(6) という表示には，重要な幾何学的な応用がある．$(0,0)$ と異なる四元数の対 (q_1, q_2)，$q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ を考えて，(左から）比例する対を同一視，つまり，$q \neq 0$ に対して $(q_1, q_2) \sim (qq_1, qq_2)$ とすると，**四元数射影直線** $\mathbb{P}^1(\mathbb{H})$ が得られる．実射影平面や複素射影平面のときのように，$q_2 \neq 0$ であるような対 (q_1, q_2) からなる有限の部分を含んでおり，それは（$q_2 = 1$ と置いて）$\mathbb{H}$ 自身と同一視することができ，$\mathbb{P}^1(\mathbb{H})$ はこの $\mathbb{H}$ に無限遠点 $(q_1, 0)$ をつけ加えることによって得られる．このことから，多様体としては，$\mathbb{P}^1(\mathbb{H})$ が 4 次元球面 S^4 と微分同相であることがわかる．$\mathbb{H}$ を (6) の形に表わし，$q_1 = z_1 + z_2 j$, $q_2 = z_3 + z_4 j$ と置いて，対 (q_1, q_2) を，すべての z_i は 0 ではないような 4 つ組 (z_1, z_2, z_3, z_4) に置き換える．これらの 4 つ組みを，0 でない複素数を掛けたものを同一視して考えれば，3 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ が得られる．$\mathbb{P}^1(\mathbb{H})$ と $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ はともに対 (q_1, q_2) の同じ集合から得られるが，同一視するプロセスが異なっている．(比例因子が前の場合では $q \in \mathbb{H}$ であり，後の場合では $q \in \mathbb{C}$ であるように選ばれるという違いである.）後の場合に同一視される対は, 当然前の場合にも同一視されるので,

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \to S^4 = \mathbb{P}^1(\mathbb{H})$$

という写像が得られる．これが幾何学的に非常に重要な，球面 S^4 上の**ツイスター・バンドル**であり，そのファイバーは $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の直線で，ある 4 次元の直線族が得られている．これによって，球面 S^4 に関する多くの微分幾何的な問題を，$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の複素解析的な幾何の問題に帰着することができるようになる．

3 次元や 4 次元の空間の直交変換群の研究への四元数の応用もあるが，それは §15 で扱う．

0 でない元 a に逆元 a^{-1} がある（つまり，$aa^{-1}=a^{-1}a=1$ を満たす元がある）ような環を**多元体**または**斜体**と言う[6]．実際には，$a^{-1}a=1$ を満たす左逆元 a^{-1} の存在を仮定するだけでよい（または，右逆元だけとしてもよい）．もし a' が a の左逆元で，a'' が a' の左逆元であれば，結合法則から $a''a'a$ は a とも a'' とも等しくなる．つまり，$aa'=a''a'=1$ となって，a' は右逆元でもあることになる．体は可換な多元体のことで，四元数は，我々が最初に出会った，非可換な多元体の例である．多元体では与えられた元に対して，逆元がただ 1 つであることは容易に確かめられる．多元体では，$a\neq 0$ であるどんな方程式 $ax=b$ も解くことができて，$x=a^{-1}b$ となる．同様に $ya=b\,(a\neq 0)$ に対しては $y=ba^{-1}$ である．

体 K 上の線形代数の標準的な概念は，任意の多元体 D 上のベクトル空間の場合に逐語的に移し変えることができる．ただ 1 つ，形式的ではあるが重要な違いを注意しておこう．もし多元体上の n 次元ベクトル空間の線形変換 φ が基底 $e_1,\ldots,e_n$ に関して行列 (a_{ij}) で与えられ，ψ が行列 $(b_{k\ell})$ で与えられていれば，容易に確かめることができるように，変換 $\varphi\psi$ が行列 $(c_{i\ell})$ で与えられるとすると，

$$c_{i\ell}=\sum_k b_{k\ell}a_{ik} \tag{8}$$

となっている．言い換えれば，行列の積に関する通常の式の中で，項の順序を交換しなければならない．(すでに 1 次元ベクトル空間の例でも，こうなっていることがわかる[7]！)

---

[6] ［訳註］「体」の用語も地域によって慣習が異なる．本書の場合も，「多元体」は英語版では division algebra で，直訳すれば「可除代数」である．この訳語も使われはするが，現在はあまり一般的でない．「斜体」は skew field で，英語で単に field「体」と言えば可換な体のことを意味することの反映である．ロシア語ではこれは тел という，ドイツ語の「体」Körper の直訳を使い，可換体については英語の「体」field の直訳である поле を使って区別している．日本語も Körper の直訳である「体」を使っている関係でか，「可換性を持たない体」を単に「体」と呼び，可換な「体」を可換体と呼ぶことの方が一般的である．(実際には可換体しか扱わない場合でも一旦はそのように定義し，以降は体と言えば可換体のことという注釈がつくことが多い）．

algebra の訳も現在は「代数」の方が一般的だが「多元環」という訳語も広く使われている．本書のように双方が混在する場合に，原則を立ててしまうとかえって煩雑で，ときに混同することもあるが，文脈だけですぐにわからない場合は，区別を強調する用語を使うことにする．

[7] ［訳註］変換は元に対してなされるもので，行列は係数に対してなされるものであることを思

これに関連して，次の定義を導入することにする．

環 R と R' が反対同型とか歪同型とか呼ばれるのは，1 対 1 対応 $a \leftrightarrow a'$, $a \in R$, $a' \in R'$ があって

$$a_1 \leftrightarrow a'_1 \text{ かつ } a_2 \leftrightarrow a'_2 \ \Rightarrow \ a_1 + a_2 \leftrightarrow a'_1 + a'_2 \text{ かつ } a_1 a_2 \leftrightarrow a'_2 a'_1$$

という性質を満たすときである．

対応 $a \leftrightarrow a'$ が R と自分自身との歪同型を与えるとき，R の**対合**と呼ばれる．可換環 A 上の全行列環 $M_n(A)$ での対応 $a \leftrightarrow a^*$（ここで a^* は転置行列）や，群環 $A[G]$ での対応 $\sum \alpha_g g \leftrightarrow \sum \alpha_g g^{-1}$ や，四元数体 $\mathbb{H}$ での対応 $q \leftrightarrow \bar{q}$ はそのようなものになっている．

各環 R には R と歪同型な反対環 R' が存在する．これを得るには，R の元と同じ元からなる集合をとり，同じ加法を与え，2 つの元 a と b の積を ab とするのではなく ba とするだけでよい．

すると，上の (8) の結果を次のように述べることができる．

定理 I. 多元体 D 上の n 次元ベクトル空間の線形変換の作る環は，反対環 D' 上の全行列環 $M_n(D')$ と同型である．

この違いを除いては，線形代数のよく知られた結果は，多元体上のベクトル空間に対しても成り立っている．さらに，D 上の射影空間 $\mathbb{P}^n(D)$ も定義することができて，ここでもよく見慣れている性質のほとんどが成り立っている．

例 7．体 K 上の n 次元ベクトル空間 L の上の，r 次の反変テンソルの空間 $T^r(L)$ を考える（加群 $T^n(M)$ の定義については §5 参照）．テンソル積の演算は，テンソル $\varphi \in T^r(L)$ と $\psi \in T^s(L)$ との積 $\varphi\psi$ を，$T^{r+s}(L)$ のテンソルとして定める[8]．この演算を使って環を構成するために，すべての空間 $T^r(L)$ の直和 $\bigoplus T^r(L)$ を考える．この直和は，0 でない項が有限個だけの列 $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots)$ で，$\varphi_r \in T^r(L)$ を満たすものの全体である．列の和は成分ごとの和とし，$(\varphi_0, \varphi_1, \ldots)$ と $(\psi_0, \psi_1, \ldots)$ との積を $(\xi_0, \xi_1, \ldots)$ と定め

い出すこと．ベクトル空間の元は $e_1, \ldots, e_n$ の 1 次結合として表わされているが，その際，係数は（今は非可換のため）左から掛けるという習慣であることを忘れてはならない．

8 ［訳註］テンソル積であることを強調して $\varphi \otimes \psi$ と書くこともある．

る．ただし，$\xi_p = \sum_{0\leq r\leq p} \varphi_r\psi_{p-r}$ とする．テンソルの積の性質から，これで環が得られたことがわかる．これは部分空間 $T^r(L)$ $(r = 0, 1, \dots)$ を含み，その元はある有限和

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_k \qquad (\varphi_r \in T^r(L))$$

として表わされる．元 $\varphi_0 \in T^0(L) = K$ は K の元と同一視され，したがって得られた環は K 上の代数である．これはベクトル空間 L の**テンソル代数**と呼ばれ，$T(L)$ と書かれる．$T^r(L)$ の和としての $T(L)$ の分解によって，$T(L)$ は次数つき代数になる．

$T^1(L) = L$ の基底 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ を1つ選んでおく．テンソル積のよく知られた性質により，$(i_1, \dots, i_m)$ がそれぞれが $1, \dots, n$ の値をとる m 個の指数の集まりを動くとき，積

$$\xi_{i_1} \ \cdots\ \xi_{i_m}$$

が $T^m(L)$ の基底をなすことがわかる．それゆえ，(すべての m に対する) そのような積のすべてが，体 K 上のテンソル代数の無限基底をなす．こうして，テンソル代数の任意の元は，元 $\xi_1, \dots, \xi_n$ の積の1次結合として書くことができ，異なる積は（積の順序も区別して）1次独立である．こういうことから，$T(L)$ は n 変数 $\xi_1, \dots, \xi_n$ の**非可換多項式代数**とも呼ばれ，その意味で，$K\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ とも書かれる．

上に述べたテンソル代数 $T(L)$ の特徴付けには重要な応用がある．(有限または無限個の) 元 $\{x_\alpha\}$ が可換環 A 上の代数 R の**生成元**であると言うのは，R の任意の元がそれらの積の，A に係数を持つ，1次結合として書くことができるときである．代数 R が K 上有限個の生成元 $x_1, \dots, x_n$ を持つとする．代数 $K\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ の任意の元 $\alpha = \sum a_{i_1\cdots i_m}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_m}$ を R の元 $\alpha' = \sum a_{i_1\cdots i_m}x_{i_1}\cdots x_{i_m}$ に対応させよう．すると準同型

$$K\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle \to R$$

が得られ，その像が R 全体になることは容易に確かめられる．こうして，有限個の生成元を持つ代数は非可換多項式代数の準同型像になる．この意味で，非可換多項式代数は非可換代数の理論において，可換代数の理論での可換な

多項式環や加群の理論での自由加群と同じ役割を果たしている．

ここでまた，非可換環の簡単な構成法を学ぶために，非可換環の例を概観していくことを中断しなければならない．可換環の場合でのように，準同型の核が満たす性質に注意を払うのは自然なことである．明らかに，$\varphi: R \to R'$ が準同型なら，その核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は，2つの元 $a, b \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ の和 $a+b$ を含み，また 元 $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ と任意の元 $x \in R$ との2つの積 ax と xa も含んでいる．可換環のイデアルの概念を非可換な場合に拡張する場合，以下の3通りの方法 (a), (b), (c) が可能であるということが問題になる．部分集合 $I \subset R$ で，任意の2元 $a, b \in I$ の和 $a+b$ を含むようなものを考える．

(a) 任意の元 $a \in I$ と $x \in R$ の積 xa がまた I に含まれるとき，I は**左イデアル**と呼ばれる．

(b) （同じ条件の下で）積 ax が I に含まれるとき，I は**右イデアル**と呼ばれる．

(c) 条件 (a) と (b) がともに成り立つとき，I は**両側イデアル**と呼ばれる．準同型の核は両側イデアルでる．

これらの概念の例を挙げよう．多元体 D 上の有限次元ベクトル空間 L の線形変換全体のなす環では，部分空間 $V \subset L$ に対して，$\varphi(V) = 0$ を満たすすべての変換 φ からなる左イデアル ${}_V I$ と，$\varphi(L) \subset V$ を満たすすべての変換 φ からなる右イデアル I_V が定義される．バナッハ空間の有界線形作用素の作る環では，すべての完全連続作用素（コンパクト作用素とも言う）は両側イデアルをなす．

xa $(x \in R)$ の形の元の全体は左イデアルをなし，ay $(y \in R)$ の形の元全体は右イデアルをなす．両側イデアルに対しては，対応する構成は多少複雑になる．一気に，より一般的な形で扱うことにする．$\{a_\alpha\}$ を R の元の系とすると，$x_1 a_{\alpha_1} y_1 + \cdots + x_r a_{\alpha_r} y_r$ $(x_i, y_i \in R)$ の形の和の全体は両側イデアルをなす．これを，系 $\{a_\alpha\}$ によって**生成されたイデアル**と言う．

可換の場合と完全に類似させて，両側イデアルの**剰余類**やこの類の作る環を定義することができる．その記号 R/I もその**商環**という名前も同じものを使うことにする．たとえば，R がバナッハ空間の有界線形作用素の環で，I がコンパクト作用素の作る両側イデアルとすると，作用素 φ の多くの性質はその R/I での像のみによる．たとえば，φ がフレドホルムの択一定理を

満たすことと，その R/I での像が逆元を持つということが同値になる．

準同型定理は，可換の場合（§4 定理 II）と全く同じように述べられ，かつ証明される．

$\{\varphi_\alpha\}$ を非可換多項式の環 $K\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle$ の元の系とし，それが生成するイデアルを I とする．代数 $R=K\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle/I$ での，$\xi_1,\ldots,\xi_n$ の像を $a_1,\ldots,a_n$ と書く．明らかにこれらは代数 R を生成する．**代数 R は生成元 $a_1,\ldots,a_n$ と関係式 $\varphi_\alpha=0$ によって定義される**という言い方をする．準同型定理によって，有限個の生成元を持つどんな代数も，ある生成元と関係式の系によって定義することができる．しかし定義によって生成系は有限ではあっても，関係式の系を有限に選ぶことができないようなことが時には起こる．

可換な多項式環 $K[x_1,\ldots,x_n]$ の定義関係式は $x_ix_j=x_jx_i$ である．R を，n 個の変数 $x_1,\ldots,x_n$ の，多項式係数の微分作用素の作る環とする．この代数の生成元は，たとえば，x_i を掛けるという作用素 q_i

$$q_i(f)=x_if$$

と作用素

$$p_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$$

からなっていて，

$$\begin{aligned} p_ip_j=p_jp_i,\quad q_iq_j=q_jq_i,\\ p_iq_j=q_jp_i\ \ (i\neq j),\quad p_iq_i-q_ip_i=1 \end{aligned}\tag{9}$$

が定義関係式であることは，容易に確かめられる．

この構成を，代数の他の重要ないくつかの例に適用してみよう．n 次元ベクトル空間 L と双線形対称形式 (x,y) が与えられているとする．空間 L のある基底の元と 1 対 1 に対応する生成元（同じ文字で表わすことにする）と

$$xy+yx=(x,y)\qquad (x,y\text{ は }L\text{ の基底として選んだ元})\tag{10}$$

の形の関係式を持つ代数を考える．

するとこの代数は，テンソル代数 $T(L)$ を

$$(x,y)-xy-yx$$

という元から生成されたイデアル I で割った商代数になる.

両極端の場合を考えてみよう.

例 8. 双線形形式 (x, y) が恒等的に 0 であると仮定しよう. すると関係式 (10) から $x^2 = 0$ が導かれる（体 K の標数が 2 でない場合にはこうなるが, 標数が 2 のときは $x^2 = 0$ を定義に入れる必要がある.）こうして作られた代数の任意の元は, L の基底ベクトルの積 $e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ の 1 次結合になっている. このような積全体が空間 $\bigwedge^r(L)$ を生成することは容易に確かめられる（加群 $\bigwedge^r(M)$ の定義は §5 参照）. これらの代数は全体として直和 $\bigwedge^0(L) \oplus \bigwedge^1(L) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n(L)$ の形に表わされる. これは有限次元の次数つき代数になり, ランクは 2^n である. この代数を空間 L の**外積代数**と言い, $\bigwedge(L)$ と書く. $\bigwedge(L)$ での積は $x \wedge y$ と書かれる.

$x \in \bigwedge^r(L)$ かつ $y \in \bigwedge^s(L)$ であれば,

$$\begin{aligned} x \wedge y &= y \wedge x \quad (r \text{ か } s \text{ のどちらかが偶数のとき}), \\ x \wedge y &= -y \wedge x \quad (r \text{ と } s \text{ がともに奇数のとき}) \end{aligned} \tag{11}$$

であることは容易にわかる. 別の言い方もできて, $\bigwedge(L) = R$, さらに,

$$\bigwedge^0(L) \oplus \bigwedge^2(L) \oplus \bigwedge^4(L) \oplus \cdots = R^0, \quad \bigwedge^1(L) \oplus \bigwedge^3(L) \oplus \cdots = R^1$$

と表わせば,

$$R = R^0 \oplus R^1,\ R^0R^0 \subset R^0,\ R^0R^1 \subset R^1,\ R^1R^0 \subset R^1,\ R^1R^1 \subset R^0 \tag{12}$$

となる. (12) の性質を持つ分解を, 代数 R の **$\mathbb{Z}/2$ 次数付け**と言う. $R = \bigwedge(L)$ の場合には, (11) のことを, $x \in R^0$ または $y \in R^0$ であれば $x \wedge y = y \wedge x$ であり, $x, y \in R^1$ であれば $x \wedge y = -y \wedge x$ であると言うことができる. この性質を持つ $\mathbb{Z}/2$ 次数つき代数を**超代数**と言う. 外積代数 $\bigwedge(L)$ はこのもっとも重要な例である. 超代数への関心は場の量子論によって刺激されてきた. 一方, 純数学的には, それは可換環の非常に自然な一般化であって, 射影空間や微分可能また解析的な多様体に類似な幾何学的対象（超射影空間や超多様体）を構成するための基礎を与えることがわかってきた. この理論は物理において, たとえば超重力の理論に応用されている.

例 9. 外積代数の定義は，((10) の中のベクトル x, y が属する）ベクトル空間 L の基底を使っている．もちろん，構成は基底の取り方に依存しない．(10) での x, y を L のすべてのベクトルとすることによって，完全に不変的（だが，非経済的）な定義を与えることもできる．こうしても同じ代数が得られることは容易にわかる．この形の定義なら，可換環 A 上のどんな加群 M に対しても適用されて，加群の**外積代数**

$$\bigwedge M = \bigoplus_r \bigwedge^r M$$

の概念が得られることになる．M が n 個の生成元の系を持つなら，$r > n$ のときは $\bigwedge^r M = 0$ となる．特に，n 次元微分可能多様体上の微分 1 形式の加群 Ω^1 の外積代数は**微分形式の代数**

$$\Omega = \bigoplus_{r \leq n} \Omega^r$$

と呼ばれる．後で，微分形式の外積演算の重要な応用を考察する．

例 10. (10) 式の双線形形式 (x, y) が非退化で，2 次形式 $F(x) = \frac{1}{2}(x, x)$ に対応しているという，もう 1 つの極端な場合を考えよう（K の標数は 2 でないとしておく）．この場合も上の場合と同じようにして，関係式 (10) を使って積 $e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ の因子を交換する議論をすることができる．唯一の相違は，$j < i$ に対して積 $e_i e_j$ が 2 つの項を生むことである．1 つは $-e_j e_i$ を含む項で，もう 1 つは (e_i, e_j) を含む項だが，こちらは $r-2$ 個の因子の積を与える．この結果，全く同じようにして，積 $e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ がこの代数の基底をなし，そのランクもまた 2^n であることが証明される．この代数を，ベクトル空間 L と 2 次形式 F の**クリフォード代数**と呼び，$C(L)$ と書く．この構成の重要性は，$C(L)$ においては 2 次形式 F が 1 次形式の平方

$$F(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = (x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)^2 \tag{13}$$

となるということにある．このように 2 次形式は「完全平方」になるが，係数はある非可換代数のものになる．

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

と置くと，(13) により，$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = (x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)^2$ となる．定

数係数の微分作用素の環 $\mathbb{R}\left[\dfrac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial y_n}\right]$ と多項式環 $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ の間の同型を使うと，この関係式を

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}=\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\cdot e_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial y_n}\cdot e_n\right)^2 \tag{14}$$

の形に書き直すことができる．相対論的量子力学のいわゆるディラック方程式を導くに際して，ディラックはクリフォード代数と類似な概念を導入したが，2 階の作用素の平方根をとるというこのアイデアが，まさにそのときの彼を動機付けたのだった．

偶数 r 個の因子の積 $e_{i_1}\cdots e_{i_r}$ はクリフォード代数 C の部分空間 C^0 を生成し，奇数個の積は部分空間 C^1 を生成する．このとき $\dim C^0=\dim C^1=2^{n-1}$ となる．$C=C^0\oplus C^1$ であることと，これが $\mathbb{Z}/2$ 次数付けを定めることは容易にわかる．特に，C^0 は C の部分代数であり，**偶クリフォード代数**と呼ばれる．

代数 $C(L)$ の任意の基底元 $e_{i_1}\cdots e_{i_r}$ を逆の順序の積 $e_{i_r}\cdots e_{i_1}$ に対応させよう．こうして $C(L)$ の対合が得られることは容易にわかる．これを $a\leftrightarrow a^*$ と書こう．

例 11. $F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ かつ $K=\mathbb{R}$ とする．すると，$C(L)$ はランク 4 で，基底は $1,e_1,e_2,e_1e_2$ であり，$e_1^2=e_2^2=1$ かつ $e_2e_1=-e_1e_2$ を満たす．$C(L)\cong M_2(\mathbb{R})$ であることは容易にわかる．このためには

$$E_{11}=\frac{1+e_1}{2},\ E_{12}=\frac{-e_2-e_1e_2}{2},\ E_{21}=\frac{-e_2+e_1e_2}{2},\ E_{22}=\frac{1-e_1}{2}$$

とおいて，元 E_{ij} の互いの積が規則 (2) に従うことを確かめる必要がある．$C(L)$ と $M_2(\mathbb{R})$ との同型は，e_1 を行列 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ に，e_2 を行列 $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ に写す．すると (14) により，ラプラス作用素 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ は $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2$ と書かれる．作用素 $\mathcal{D}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}$ $+\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}$ が列ベクトル $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ に作用するなら，方程式 $\mathcal{D}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$

から

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

という方程式，つまり，コーシー–リーマン方程式が得られる．

今度は $F(x_1, \ldots, x_{2n}) = x_1^2 + \cdots + x_{2n}^2$ とする．$2n$ 個の指数 $1, \ldots, 2n$ を n 個の対 $(1,2), (3,4), \ldots, (2n-1, 2n)$ に分け，i_p が p 番目の対に属すような指数の集まり $(i_1, \ldots, i_n)$ を $\alpha, \beta, \ldots$ などと書いて表わす．$\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$, $\beta = (j_1, \ldots, j_n)$ であれば，

$$E_{\alpha\beta} = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_n j_n}$$

と置く．ここで，E_{ij} は，$n = 1$ での場合のように，e_i, e_j を使って表わしたものとする．$E_{\alpha\beta}$ の積がまた規則 (2) に従うこと，つまり，$C(L) \cong M_{2^n}(\mathbb{R})$ であることが容易に確かめられる[9]．

例 12. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ かつ $K = \mathbb{R}$ とすると，偶クリフォード代数 $C^0(L)$ は四元数体と同型である．e_1e_2，e_2e_3，e_3e_1 の積は例 5 の規則に従う．

可換の場合には，体は（0 以外の）イデアルを持たない環として特徴付けることができる[10]．非可換の場合には，いつものことだが，関係が少し複雑になる．可換の場合とちょうど同じように，(0 以外の）左イデアルが存在しないことが，0 以外のあらゆる元が左逆元（$a^{-1}a = 1$ を満たす）を持つという事実と同値であり，また右イデアルと右逆元も同じ関係を持っていることが証明される．こうして，多元体とは 0 以外の左イデアルを持たない（または右イデアルを持たない）環のことである[11]．

では，両側イデアルがないことは何に対応するのだろうか？ 0 以外の両側イデアルを持たない環は**単純環**と呼ばれる．環論において単純環が果たす極めて重要な役割については後で考察する．単純環は多元体とともに，体の概

---

9 ［訳註］残念ながら，$n \equiv 0, 1 \pmod 4$ のときは正しいが，$n \equiv 2, 3 \pmod 4$ のときは正しくない．もちろん，$K = \mathbb{C}$ なら正しい．クリフォード代数の構造はよく知られていて，ブルバキ [17] より横田一郎 [128] 第 I 章 §7 が読みやすい．

10 ［訳註］もちろん全体もイデアルであり，0 と全体以外のイデアルを持たないと言うべきであるが，講義の口調の中では当然のこととして述べ忘れたのだろう．同じ注意が必要な箇所がこの段落の中には数回出てくる．

11 ［訳註］例 6 の後の議論を参照．

念を非可換な領域に自然に拡張したものと考えることができる.

例 13. 多元体 D 上の n 次元ベクトル空間 L の線形変換の環 R の左イデアルと右イデアルの構造を明らかにしよう. 前に与えた構成（イデアル ${}_VI$ と I_V）がそれらすべてを記述することを示そう. 以下, 左イデアルに限ることにする. I を左イデアルとし, $V \subset L$ を, すべての $\varphi \in I$ に対して $\varphi(x) = 0$ となるような元 $x \in L$ からなる部分空間とする. $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ を D 上のベクトル空間としての I の基底とすれば, $\bigcap \operatorname{Ker} \varphi_i = V$ となる. $\varphi \in R$ が $\operatorname{Ker} \varphi = V$ を満たせば, $\operatorname{Ker} \varphi' \supset V$ を満たすどんな線形変換 φ' も $\psi\varphi$ $(\psi \in R)$ の形に表わすことができることは容易にわかる. このことから, $\varphi_1, \varphi_2 \in I$ ならば, $\operatorname{Ker} \bar{\varphi} = \operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \operatorname{Ker} \varphi_2$ となるような線形変換 $\bar{\varphi}$ が I に含まれることが, 容易に導かれる[12]. この注意を変換 $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ に適用すれば, $\operatorname{Ker} \bar{\varphi} = V$ となる元 $\bar{\varphi} \in I$ が得られ, これによって（上に述べたことから）, $\varphi(V) = 0$ を満たすすべての変換 φ は I に含まれることが, つまり, $I = \{\varphi \mid \varphi(V) = 0\} = {}_VI$ であることがわかる. 右イデアルも同様に考えることができる.

最後に, I を R と異なる両側イデアルとする. 左イデアルとして, それは $I = \{\varphi \mid \varphi(V) = 0\}$ であるようなある部分空間 V に対応している. $x \in V$ を $x \neq 0$ であるようにとる. $\varphi \in I$ に対しては $\varphi(x) = 0$ となる. I は右イデアルだから, どんな $\psi \in R$ に対しても $\varphi\psi \in I$ であり, それゆえ $\varphi(\psi(x)) = 0$ である. しかし, $\psi(x)$ は L のどんなベクトルにとることもできたわけで, それゆえ[13] $I = 0$ となる. こうして, 環 R は単純環である. $M_n(D)$ はそのような環 R と同型で, 単純環になる.

単純環のもう 1 つの例は, 多項式係数の微分作用素の環 R である. 基本的なアイデアをはっきりさせるために $n = 1$ とする. p を作用素 $\dfrac{d}{dx}$ とすれば, 関係式

$$pf(q) - f(q)p = f'(q)$$

を容易に確かめることができる. $\mathcal{D} = \sum f_i(q)p^i$ が両側イデアル I に含まれ

12 ［訳註］「このことから」という意味はよくわからない. しかし, 上の主張を証明するときに使ったであろう線形代数の通常の議論と同じ程度の議論を使えば,「容易に」示すことができるのは確かである.

13 ［訳註］それゆえ, $\varphi = 0$ であり, φ は I の任意の元だったから, $I = 0$ となる.

ていて $\mathcal{D} \neq 0$ であるとする．何度か $p\mathcal{D} - \mathcal{D}p$ を繰り返して施せば，p の定数係数の 0 でない多項式である元 $\Delta \in I$ が得られる．$\Delta = g(p)$ と書く．関係式 (9) では p と q の区別がないので，関係式 $g(p)q - qg(p) = g'(p)$ が得られることになる．何度もこのようなことをすれば，I に属す 0 でない定数が得られる．したがって，$I = R$ である．(この議論を正当化するには係数体の標数が 0 であることが必要である．)

例 14. 単純環に近い代数には，2 次形式 F を持つ任意のベクトル空間 L に対するクリフォード代数 $C(L)$ と $C^0(L)$ がある（係数体の標数は $\neq 2$ であると仮定している）．以下の結果を確かめることは難かしくない．$n = \dim L$ として，$n \equiv 0 \pmod 2$ であれば，代数 $C(L)$ は単純で，$Z(C(L)) = K$ である．$n \equiv 1 \pmod 2$ であれば，代数 $C^0(L)$ は単純で，$Z(C^0(L)) = K$ である．残りの場合は，$e_1, \ldots, e_n$ を L の直交基底とするときの，元 $z = e_1 \cdots e_n \in C(L)$ の性質に関係している．$n \equiv 1 \pmod 2$ のとき z は $C(L)$ の中心に含まれ，また $n \equiv 0 \pmod 2$ のとき z は $C^0(L)$ の中心に含まれて，両方の場合とも，これらの代数の中心は $K + Kz$ の形をしていることは容易に確かめられる．すると，$z^2 = a \in K$ であり，n の偶奇に従って，$a = (-1)^{n/2}D$ または $a = (-1)^{(n-1)/2}D$ となっている．D は基底 $e_1, \ldots, e_n$ に関する 2 次形式 F の判別式を表わしている．a が K の中で平方でないなら，$K + Kz = K(\sqrt{a})$ であり，対応する代数は単純でその中心は $K(\sqrt{a})$ である．a が K の中で平方なら，代数 $K + Kz$ は $K \oplus K$ に同型であり，対応するクリフォード代数は，中心を K とする同じランクの 2 つの単純代数の直和に同型である．

例 15. 形式的ローラン級数（§2 例 5 参照）を使えば，興味深い例が得られる．その構成を 2 度使って，環 $K((x))((\partial^{-1}))$ を考えよう．その元は体 $K((x))$ に係数を持つ元 ∂^{-1} の形式的ローラン級数であり，その際，x と ∂^{-1} は可換でなく，よく知られた関係式 $\partial x - x\partial = 1$ で結ばれている（この式から $x\partial^{-1} - \partial^{-1}x = \partial^{-2}$ が得られる）．環 $K((x))((\partial^{-1}))$ が多元体であることは（逆級数を ∂^{-1} のベキに関する帰納法で構成して）容易に確かめられる．これは**形式的擬微分作用素**の体と呼ばれる（直観的には ∂^{-1} は $\displaystyle\int_0^x$ という作用素と解釈できる）．

§ 9.　非可換環上の加群

任意の環 R の上の加群は，可換環の場合と同じように定義される．それは集合 M であって，任意の 2 元 $x, y \in M$ に対して和 $x+y$ が定義され，元 $x \in M$ と環の元 $a \in R$ に対して積 $ax \in M$ が定義され，(すべての $x, y, z \in M$ と $a, b \in R$ に対して) 次の条件を満たすもののことである．

$$\left.\begin{array}{c} x+y=y+x, \\ (x+y)+z=x+(y+z), \\ 0+x=x=x+0 \text{ を満たす } 0 \in M \text{ が存在する}, \\ x+(-x)=0 \text{ を満たす } -x \in M \text{ が存在する}, \\ 1 \cdot x = x, \\ (ab)x=a(bx), \\ (a+b)x=ax+bx, \\ a(x+y)=ax+ay. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

同型，準同型，核，像，商加群，直和の概念はまったく同じで，可換性の仮定は使っていない．環 R は，(環の元としての) a と (加群の元としての) x の積が ax になるものとして定義すると，R 自身の上の加群となる．この加群の部分加群は R の左イデアルである．もし I が左イデアルならば，$\bmod I$ の剰余類は R 上の加群 R/I をなす. (加群の元としての) x に (環の元としての) a を右から掛けても，R 加群の構造を定めない．実際，この積を一時的に $\{ax\} = xa$ と書いたとしたら (加群の中としては左から，環の中としては右から)，$\{(ab)x\} = \{b\{ax\}\}$ となり，公理 (1) に矛盾する．しかし，こう見れば R が反対環 R' 上の加群になると言うことはできる．この R' 上の加群では，部分加群は R の右イデアルに対応している．

非可換環上の加群の最も本質的な例は，第 1 に，環それ自身とそのイデア

ルをその環上の加群と考えたものである．この加群を考えることが環自身の研究のためにどんなに重要であるかはすぐに述べることにする．第2は，群環上の多くの加群であり，その研究は群の表現論のテーマで，これについては後で詳しく述べることにしよう．

R が体 K 上の代数であれば，あらゆる R 加群 M は自動的に K 上のベクトル空間になる（無限次元かも知れないが）．加群の公理から，任意の $a \in R$ に対して，写像 $\varphi_a(x) = ax$ $(x \in M)$ がこのベクトル空間の線形変換になることがわかる．さらに，a を線形変換 φ_a に対応させることは，代数 R から，K 上のベクトル空間としての M の線形変換全体のなす代数 $\mathrm{End}_K(M)$ への準同型になる．逆に，ベクトル空間 L の線形変換の代数への準同型

$$R \to \mathrm{End}_K(L), \qquad a \mapsto \varphi_a$$

は明らかに，L 上の R 加群の構造を定めて，

$$ax = \varphi_a(x) \qquad (a \in R,\ x \in L) \tag{2}$$

となる．

この状況では，一般の場合に使われているものとはいくぶん異なる用語を使うことがある．この特殊な場合が特に重要であることから，これまで一般の場合に与えた基本的な定義を，新しい用語で繰り返すことにする．

加群の再定義． 体 K 上の代数 R の K ベクトル空間 L 上の表現とは，R から L の線形変換の代数 $\mathrm{End}_K(L)$ への準同型のことである．

言い換えれば，R の表現とは，各元 $a \in R$ を線形変換 φ_a に写し，

$$\varphi_1 = E \quad (\text{恒等変換}), \tag{3}$$

$$\varphi_{\alpha a} = \alpha\varphi_a \quad (\alpha \in K,\ a \in R), \tag{4}$$

$$\varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b \quad (a, b \in R), \tag{5}$$

$$\varphi_{ab} = \varphi_a\varphi_b \quad (a, b \in R) \tag{6}$$

という条件を満たすもののことである．

部分加群の再定義． 部分表現とは，すべての変換 φ_a $(a \in R)$ のもとで不

変な部分空間 $V \subset L$ であって，それらの線形変換が V 上に定める R の表現を考えるものである．

商加群の再定義． 部分表現 $V \subset L$ による**商表現**とは，空間 L/V であって，変換 φ_a によって導かれる表現を考えるものである．

R が体 K 上の有限ランクの代数で，基底 $1 = e_1, \dots, e_n$ と乗積表 $e_i e_j = \sum c_{ijk} e_k$ を持つものならば，表現の定義の条件 (3)–(6) は，

$$\varphi_1 = E, \tag{7}$$

$$\varphi_{e_i} \varphi_{e_j} = \sum c_{ijk} \varphi_{e_k} \tag{8}$$

という関係を満たす変換 $\varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_n}$ を与えることに帰着する．

もし $R = K[G]$ が有限群 G の群環ならば，条件 (7), (8) は

$$\varphi_1 = E, \tag{9}$$

$$\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \varphi_{g_2} \tag{10}$$

の形をとる．条件 (9)–(10) はすべての変換が可逆であることを保証している．

G が無限群で，群環が群の元の 1 次結合全体として定義されていれば（§8 例 4 参照），同じ条件 (10) があれば表現は与えられる．もし群環がたたみ込みの演算を持つ群上の関数の作る代数として定義されていれば，群の元はデルタ関数としてそれに含まれるだけで，それゆえ作用素 φ_g は存在しないかも知れない．一方，(9) と (10) を満たす作用素 φ_g が存在するなら，関数 f に対応する作用素 φ_f は，作用素関数 $f(g)\varphi_g$ の群全体にわたる積分として定義することができる．それゆえ群を表現するには，条件 (9) と (10) の方が群環に対する条件 (3)–(6) より広いことになり，**群表現**の定義としては (9) と (10) という関係式がとられる．

もし代数 R の表現が実現されている加群 M が体 K 上有限次元なら，表現が**有限次元**であると言う．この場合，線形変換 φ_a は，（M の基底が選ばれていれば）行列によって与えられる．この言葉で表現論の基本概念をもう一度定式化し直そう．

代数 R の**有限次元表現**とは準同型 $R \to M_n(K)$ である．つまり，各元

$a \in R$ に行列 $C_a \in M_n(K)$ を対応させるとき,

$$\begin{aligned} C_1 &= E, \\ C_{\alpha a} &= \alpha C_a, \\ C_{a+b} &= C_a + C_b, \\ C_{ab} &= C_a C_b \end{aligned}$$

という条件を満たすもののことである．群 G の表現の場合，これらの条件は

$$\begin{aligned} C_e &= E, \\ C_{g_1 g_2} &= C_{g_1} C_{g_2} \end{aligned}$$

に置き換えられる．

加群の同型の概念の再定義． 2 つの表現 $a \mapsto C_a$ と $a \mapsto C'_a$ が同値であるとは，非退化な行列 P が存在して，あらゆる $a \in R$ に対して $C'_a = PC_aP^{-1}$ となるときに言う．

部分加群の概念の再定義． 表現 $a \mapsto C_a$ が部分表現 $a \mapsto D_a$ を持つとは，非退化な行列 P が存在して，行列 $C'_a = PC_aP^{-1}$ が

$$C'_a = \begin{pmatrix} D_a & S_a \\ 0 & F_a \end{pmatrix} \tag{11}$$

の形になるときに言う．

商加群の概念の再定義． (11) の行列 F_a は，与えられた部分表現による商表現をなす．

加群の直和の概念の再定義． (11) で $S_a = 0$ であれば，表現 C_a は表現 D_a と F_a の直和であると言う．

特に代数 R を R 上の加群と考えるとき，代数 R の重要な表現が得られる．それは**正則表現**と呼ばれる．R が，c_{ijk} を構造定数とする有限の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を持てば，正則表現では元 $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ は行列 (p_{jk}) に対応する．ただし，$p_{jk} = \sum_i c_{ikj}\alpha_i$ である．

(必ずしも代数でない) 任意の環 R 上の加群に戻って,「有限次元性」の特徴を持つ重要な条件を考える. これは, 部分空間の鎖の最大の長さとしての, ベクトル空間の次元の定義に関係したものである.

R 加群 M の長さを, 部分加群の鎖

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = 0$$

の長さ r の最小上界として定義する.

もちろん, 加群の長さは有限かも知れないし無限かも知れない. 有限の長さ r の加群 M と最大の長さの鎖 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = 0$ を考える. もし加群 M_i/M_{i+1} が M_i/M_{i+1} 自身とも 0 とも違う部分加群 N を含めば, 標準準同型 $M_i \to M_i/M_{i+1}$ による N の原像 M' は部分加群で, $M_i \supsetneq M' \supsetneq M_{i+1}$ となるだろう. これを上の鎖に挿入すればより長い鎖が得られる. それゆえ, M_i/M_{i+1} にはそのような部分加群はあり得ない. こうして得られた概念は非常に重要である.

加群 M が**単純**であるとは, 0 と M 以外の部分加群を持たないときに言う.

代数 (または群) の, 単純加群に対応する表現を**既約**であると言う.

単純性は非常に強い条件である.

例 1. 体上のベクトル空間の場合, 単純なのは 1 次元空間だけである.

例 2. L が有限次元複素ベクトル空間で, そこに線形変換 φ が与えられているとし, 環 $\mathbb{C}[t]$ 上の加群と考える (§5 例 3 参照). φ は常に固有ベクトルを持つから 1 次元の不変部分空間を持つので, L が単純であるのはまた 1 次元のときだけである.

例 3. 環 R をそれ自身の上の加群と考える. R が単純であるとは, R に左イデアルがないということで, つまり R が多元体であることを意味する.

M と N を 2 つの単純加群で, $\varphi : M \to N$ を準同型とする. この条件から, $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ または M であり, $\operatorname{Im}\varphi = 0$ または N である. もし $\operatorname{Ker}\varphi = M$ または $\operatorname{Im}\varphi = 0$ であれば φ は零準同型である. 残った場合は, $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ かつ $\operatorname{Im}\varphi = N$ であり, それゆえ φ は同型である. こうして次の結果が成

り立つ.

定理 I. シューアの補題. 単純加群から単純加群への準同型は, 零準同型か同型かのどちらかである.

長さの概念に戻ろう. M が長さ r の加群なら, 鎖 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = 0$ において, 各加群 M_i/M_{i+1} が単純でなければならないことがすでにわかっている.

加群 M_i/M_{i+1} が単純であるような鎖 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = 0$ を組成列と言う. 次の結果が成り立つ.

定理 II. ジョルダン–ヘルダーの定理. 同じ加群のすべての組成列は同じ長さを持つ.(そして, 特にそれはすべて有限であるかすべて無限であるかである). もし有限なら, それに現れる加群 M_i/M_{i+1} は, 並ぶ順序が違うことは起こりうるが, 互いに同型である.

こうして, 有限の長さの加群では, 最も長い部分加群の鎖はまさに組成列になっている.

長さの概念を環に拡張する. 環 R の長さは, R 加群としての長さである.

つまり, 左イデアルの鎖 $R \supsetneq I_1 \supsetneq \cdots \supsetneq I_r = 0$ で, これより長い鎖が存在しないとき, R の長さを r と言う.

すでに見たように, 多元体は長さ 1 の環である. 多元体 D 上の全行列環 $M_n(D)$ の左イデアルは, 反対多元体 D' 上の n 次元空間 L の線形部分空間に対応している (§8 例 13 参照). それゆえ, $M_n(D)$ の長さは n である.

もちろん, 環 R が体 K 上の代数ならば, R の長さはその K 上のランクを越えない.

有限の長さの加群が有限生成である (また同じことだが有限型である) ことは, 可換環の場合のネーター加群の性質のアナロジーになっている.

環 R が有限の長さを持てば, 任意の有限生成 R 加群の長さはまた有限である. これは次のように示される. 元 $x_1, \ldots, x_n$ が加群 M を生成すれば, M は加群 R^n からの準同型 $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ の像であり, 有限の長さの加群の商として有限の長さを持つ.

最後に，可換環上の加群の理論でしばしば出会う概念を少し詳しく考えてみよう．

R 加群 M の自分自身への準同型は**自己準同型**と呼ばれる．1つの加群の自己準同型全体は明らかに環をなし，$\mathrm{End}_R(M)$ と書かれる．

可換の場合との重要な違いは，自己準同型 $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ に元 $a \in R$ を掛けるという積が定義できないということである．写像 $x \mapsto a\varphi(x)$ は一般にはもう R 上の自己準同型ではなく，つまり，自己準同型と R の元との積は $\mathrm{End}_R(M)$ の中では定義されない．

例 4. 環 R を R 加群と考える．この加群の自己準同型環 $\mathrm{End}_R(R)$ はどんなものだろうか？　定義により，自己準同型 φ は R から R への写像で

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\quad \varphi(ax)=a\varphi(x) \qquad (a,x,y\in R) \tag{12}$$

という条件を満たすものである．

$\varphi(1)=f$ とおけば，(12) で $x=1$ とすると，どんな $a \in R$ に対しても $\varphi(a)=af$ となる．こうしてどんな自己準同型も，元 $f \in R$ を右から掛けることで与えられる．このことから，環 $\mathrm{End}_R(R)$ は R の**反対環**であることがわかる．

例 5. 加群 M は，n 個の同型な加群 P の直和と同型，つまり $M \cong P^n$ とする．すると M は P の元 x_i の列 $(x_1,\ldots,x_n)$ からなっている．状況はベクトル空間の線形変換の記述と完全に同じであり，解答もまったく類似のものになる．$\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ と $x \in P$ に対して

$$\varphi((0,\ldots,x,\ldots,0))=(\psi_{i1}(x),\ldots,\psi_{in}(x))$$

と置く（ここで，左辺の x は i 番目の場所にある）．ここで，ψ_{ij} は P から P への準同型，つまり $\psi_{ij} \in \mathrm{End}_R(P)$ となる．φ を，$\mathrm{End}_R(P)$ の元を成分にする行列 (ψ_{ij}) に対応させると，同型

$$\mathrm{End}_R(P^n) \cong M_n(\mathrm{End}_R(P))$$

が得られる．

P が多元体 D（自分自身の上の加群として）という特別な場合には，（例 4

の結果を使って）多元体 D 上の線形変換の環に対して以前に考察した表示が再現される（§8 定理 I 参照）．

例 6. 単純加群 M の自己準同型環 $\mathrm{End}_R(M)$ は多元体である．これは定理 I の直接の帰結である．

§ 10.　半単純加群と半単純環

非可換環上の加群の理論と環自身の構造の研究について，これまでの節では一般的な定義やほとんど明らかな性質を取り扱ってきた．しかし，条件としては強いがよく現れる半単純という性質を満たすような対象に制限すると，理論はずっと深いものになる．

加群 M が**半単純**であるとは，M の任意の部分加群が直和因子であるときに言う．この条件は，任意の部分加群 $N \subset M$ に対して，$M = N \oplus N'$ となるような第 2 の部分加群 $N' \subset M$ が存在することを意味している．

明らかに，半単純加群の部分加群，準同型像，直和は半単純である．単純加群は半単純である．有限の長さの加群には単純な部分加群があり，それゆえ，有限の長さの半単純加群は単純加群の直和になる．ジョルダン–ヘルダーの定理から（§9 定理 I からもっと簡単に導くことができるが），半単純加群の単純加群の直和分解が一意的であること（つまり，単純直和因子は同型を除いて一意的に決定されること）がわかる．これら直和因子の数は加群の長さになっている．

$P \subset M$ が単純で，$N \subset M$ が任意の部分加群であれば，$P \subset N$ であるか $P \cap N = 0$ になる．このことから次の定理が得られる．

定理 I. 加群が有限個の単純部分加群で生成されていれば，それは半単純で，かつ有限の長さを持つ．

実際，単純部分加群 $P_1, \ldots, P_n$ が M を生成しており，$N \subset M$ だが $N \neq M$ だとすれば，ある $P_i \not\subset N$ が存在する．そのとき，$P_i \cap N = 0$ であり，P_i と N で生成される部分加群は直和 $P_i \oplus N$ と同型である．これと同じ議論を何回か使うことによって，$M = N \oplus N'$ という分解が得られる．

例 1. M を，線形変換 φ が与えられている有限次元ベクトル空間 L で，

$K[t]$ 上の加群と考えたものとする（§5 例 3 参照）．加群 M が単純なら L は 1 次元ベクトル空間である（§9 例 1 参照）．それゆえ，M が半単純であることは，L が 1 次元の不変部分空間の直和として表わされること，すなわち，φ が対角化可能であることと同値である．一般の場合には，半単純性の意味は「対角行列でないジョルダン・ブロックが存在しない」ということに近い．

例 2. M が，体 $\mathbb{C}$ 上の代数 R の有限次元表現 φ に対応しているとする．（$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として）M にエルミート内積 (x, y) が定義され，表現 φ が，任意の $a \in R$ に対して $\varphi_a^* = \varphi_{a'}$ となるような $a' \in R$ が存在するという性質（ここで，φ_a^* は共役な変換[1]を表わす）を持つと仮定する．そのとき加群 M は半単純である．

実際，$N \subset M$ が，変換 $\varphi_a, a \in R$ に関する不変部分空間であれば，その直交補空間 N' は変換 φ_a^* の元で不変となるから，仮定によりすべての φ_a の元で不変となる．それゆえ R 加群として $M = N \oplus N'$ である．

例 3. M が群 G の体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現 φ に対応しており，またもエルミート内積が定義されていて，それに関してすべての作用素 $\varphi_g, g \in G$ がユニタリ，つまり

$$(\varphi_g(x), \varphi_g(y)) = (x, y) \tag{1}$$

を満たしているとする．そのとき，M は半単純である．

仮定により $\varphi_g^* = \varphi_g^{-1}$ だが，$\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ であるから，これは例 2 の特別な場合になる．

半単純性の概念は群の無限次元表現に拡張されるが，少し修正が必要になる．$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての M には位相かノルムが与えられていて，部分加群 N は閉空間であることを仮定する．特に，例 3 の状況で，M がエルミート内積 (x, y) に関するヒルベルト空間であれば，上の議論は有効である．

例 4. 有限群 G の体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現は半単純加群を定める．

---

[1] ［訳註］M の線形写像 φ に対して，すべての $m, n \in M$ に対して，$(\varphi m, n) = (m, \varphi^* n)$ を満たす M の線形写像 φ^* が存在する．これを φ の共役または随伴と言う．$M = \mathbb{C}^k$ の場合，標準的なエルミート内積 $(x, y) = \sum_i x_i \overline{y_i}$ を考えれば，対応する行列 $A = A_\varphi$ と $A^* = A_{\varphi^*}$ の間には $A^* = {}^t\bar{A}$ という関係がある．

状況は上の例に帰着することができる.(ℂ 上のベクトル空間と考えた) 加群 M 上に任意のエルミート内積 $\{x, y\}$ を導入し

$$(x, y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \{\varphi_g(x), \varphi_g(y)\} \tag{2}$$

と置く. ここで, 和は群 G のすべての元 $g \in G$ にわたってとられ, $|G|$ は G の元の個数を表わしている[2]. 積 (x, y) が例 3 の条件を満たすことを容易にわかる.

同じ議論を, 任意の体の上の表現にも適(あ)うようにすることができる.

例 5. 有限群 G の位数 n が体 K の標数で割り切れないなら, 群 G の体 K 上の任意の有限次元表現は半単純加群を定める.

M を表現 φ_g が働く空間で, $N \subset M$ を部分加群とする.(ベクトル空間として) $M = N \oplus N'$ となるような任意の部分空間 N' を選んで, N の上への射影で N' に平行なものを π' と書く. つまり, $x = y + y'$ ($x \in M$, $y \in N$, $y' \in N'$) のときに $\pi'(x) = y$ とするのである. 線形変換

$$\pi = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \varphi_g^{-1} \pi' \varphi_g \tag{3}$$

を考えると, $\pi M \subset N$ であり, $x \in N$ に対しては $\pi x = x$ であり, どんな $g \in G$ に対しても $\varphi_g \pi = \pi \varphi_g$ となることは容易に確かめられる. このことから, π が N の上への射影で, 部分空間 $N_1 = \operatorname{Ker} \pi$ に平行であり, N_1 がすべての φ_g ($g \in G$) の下で不変であることがわかる. つまり, π は $M = N \oplus N_1$ となるような部分加群 $N_1 \subset M$ を定義している.

半単純性の概念を加群から環に移そう. 環 R が半単純であるとは, R 自身の上の加群として半単純であるときに言う. 例 4, 5 から, 有限群 G の体 K 上の群環は, 群の位数が体の標数で割り切れないなら半単純であることがわかる.

定理 II. 有限の長さの単純環 R (§8 参照) は半単純である.

---

[2] [訳註] $|G|$ を有限群 G の位数と言う.

実際，すべての単純部分加群で生成された R の部分加群 I を考える．R の長さの有限性から，I が有限個の部分加群 $P_1, \ldots, P_n$ で生成されることがわかる．明らかに I は環 R の左イデアルである．すべての $a \in R$ に対して $P_i a$ は左イデアルでかつ単純な部分加群であるから $P_i a \subset I$ となり，それゆえ $Ia \subset I$ となるので，I は右イデアルでもある．R は単純環なので $I = R$ であり，つまり R は単純部分加群 P_i によって生成され，定理 I によって半単純である．

半単純環上の加群の理論の特徴は非常に具体的であるということである．

定理 III. *R が有限の長さの半単純環で，*

$$R = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$$

が（R 上の加群としての）R の単純部分加群による直和分解であれば，P_i $(i = 1, \ldots, n)$ だけが R 上の単純加群である．有限の長さの加群は半単純であり，いくつかの加群 P_i のコピーの直和になっている．

実際，M を任意の加群，$x_1, \ldots, x_k$ を M の元とすれば，準同型 $f : R^k \to M$ が

$$f((a_1, \ldots, a_k)) = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$$

によって定義される．M の長さの有限性から，元 $x_1, \ldots, x_k$ を適当に選べば，$\mathrm{Im}\, f = M$ となることになる．こうして M はある半単純加群の準同型像であり，したがって半単純になる．M が単純加群なら，R^k を $P_1^k \oplus \cdots \oplus P_n^k$ と書き直せば，P_j が M と同型でなければ $f(P_j) = 0$ となることがわかり，それゆえある i に対して $P_i \cong M$ となる．

系． *特に，有限の長さの半単純環の上では，（同型を除いて）単純加群は有限個しか存在しない．*

さて，有限の長さの半単純環の構造の記述を考えることにしよう．それ自身の上の加群として，そのような環は単純部分加群の直和

$$R = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k \tag{4}$$

に分解する．この分解で，R 加群として互いに同型な項をすべて1つに集めると，

$$R = (P_1 \oplus \cdots \oplus P_{k_1}) \oplus (P_{k_1+1} \oplus \cdots \oplus P_{k_2}) \oplus \cdots \oplus (P_{k_{p-1}+1} \oplus \cdots \oplus P_{k_p})$$

となる．つまり

$$R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_p \tag{5}$$

であって，それぞれが

$$R_i = P_{k_{i-1}+1} \oplus \cdots \oplus P_{k_i} \tag{6}$$

となる．ここで，(6) では，すべての単純部分加群 P_j $(k_{i-1} < j \leq k_i)$ は互いに同型で，異なる直和因子 R_α と R_β の中に現れる加群 P_j は同型でない．

任意の単純な部分加群 $P \subset R$ は P_α のどれかに同型であり，このことから P_α と同じ直和因子 R_i に含まれることを導くのは難しくない．特に，加群 $P_\alpha a$ $(a \in R)$ は P_α に同型で，それゆえ $P_\alpha \subset R_i$ ならば $P_\alpha a \subset R_i$ となる．言い換えれば，R_i は（R 部分加群なのだから）左イデアルであるばかりでなく，右イデアルでもあって，つまり両側イデアルである．このことから，$R_i R_j \subset R_i$ かつ $R_i R_j \subset R_j$ であり，それゆえ $i \neq j$ に対しては $R_i R_j = 0$ となる．分解 (5) における 1 の R_i 成分は環 R_i の単位元になっていて，環の直和としての分解

$$R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_p$$

が得られている．ここで R_i は完全に一意的に定まっており，それぞれは，R の互いに同型な単純部分加群の全体から生成されている．

さて環 R_i のうちの1つを考えよう．このためには分解 (6) を

$$R_i = P_{i,1} \oplus P_{i,2} \oplus \cdots \oplus P_{i,q_i}$$

と書いておくのが便利である[3]．ここで単純部分加群 $P_{i,j}$ はすべて同型で，つまり，すべての $P_{i,j}$ $(j = 1, \ldots, q_i)$ と同型なある加群 N_i があって $R_i \cong N_i^{q_i}$ となっている．

この R 上の加群の自己同型環を求めよう．$s \neq i$ のときは $R_s R_i = 0$ で

[3] ［訳註］もちろん，$q_i = k_i - k_{i-1}$ である．ただし，$k_0 = 0$ としている．

あるから，$\mathrm{End}_R(R_i) = \mathrm{End}_{R_i}(R_i)$ であり，こうして，$\mathrm{End}_R(R_i)$ は R_i に歪同型な反対環 R_i'（§9 例 4 参照）に同型である．一方，§9 例 5 によって $\mathrm{End}_R(R_i) \cong M_{q_i}(\mathrm{End}_R(N_i))$ であり，$\mathrm{End}_R(N_i)$ は多元体 D_i である（§9 例 6 参照）．したがって，$R_i' \cong M_{q_i}(D_i)$ であり，

$$R_i \cong M_{q_i}(D_i') \tag{7}$$

となる．$M_q(D)$ が単純環であることはわかっているので（§8 例 13 参照），(7) の環 R_i は単純環である．分解 (5) と同型（7）とを合わせると，次の基本定理が得られる．

定理 IV．ウェダーバーンの定理．有限の長さの半単純環は，有限個の単純環の直和に同型である．有限の長さの単純環は，ある多元体上の全行列環に同型である．

逆に，多元体 D に対して $M_q(D)$ が単純環であることはわかっており（§8 例 13 参照），半単純環の直和が半単純であることは容易にわかる．それゆえ，ウェダーバーンの定理は半単純環のクラス全体の完全な記述を与えている．つまり，半単純環とは多元体上の全行列環の直和である．特別な場合として次の定理が得られる．

定理 V．有限の長さの可換環が半単純であるのは，それが体の直和であることと同値である．

任意の半単純環 R に対して，その中心 $Z(R)$ は可換である．$Z(R_1 \oplus R_2) \cong Z(R_1) \oplus Z(R_2)$ と $Z(M_n(D)) \cong Z(D)$ は容易にわかる．それゆえ，次の系が得られる．

系．半単純環 R の中心は体の直和と同型で，中心の直和因子の数は R の単純環の直和としての分解 (5) の直和因子の数に等しい．

特に，次の定理が得られる．

定理 VI．有限の長さの半単純環が単純であるのは，その中心が体であることと同値である．

さて，この一般論を $M_n(D)$ という基本的な環の例で説明しよう．§8 例 13 で，多元体 D に対して，$R = M_n(D)$ の左イデアルがどのようなものであるかを見た．この環の左イデアルはどれも ${}_VI = \{a \in R \mid aV = 0\}$ の形をしている．ここで，a は（反対環 D' の上の）n 次元ベクトル空間 L の D' 線形変換と考えられており，$V \subset L$ はある部分ベクトル空間である．単純部分加群は極小イデアルに対応している．明らかに，$V \subset V'$ ならば ${}_VI \supset {}_{V'}I$ である．それゆえ，V として L の $n-1$ 次元部分空間をとれば，**極小イデアル** ${}_VI$ が得られる．L のある基底 $e_1, \ldots, e_n$ を選び，この基底で i 番目の座標が 0 であるようなベクトルの作る空間を V_i と書く．イデアル ${}_{V_i}I$ は第 i 列以外が 0 であるような行列からなっている．分解 $R = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ は，

$$\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{7'}$$

という行列の分解に対応している．これに任意の行列を左から掛けると，i 番目の列は L のベクトルとまったく同じように変換される．こうして，すべてのイデアル N_i は R 加群として同型であり，L に同型となる．これが R 上ただ 1 つの単純加群である．

有限の長さの任意の半単純代数 R の場合には，状況はいくぶん複雑になるだけである．R が p 個の全行列環の直和

$$R = M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_p}(D_p)$$

に分解されれば，R は p 個の単純加群 $N_1, \ldots, N_p$ を持つ．ここで，N_i は反対多元体 D_i' 上の n_i 次元ベクトル空間で，R は N_i に次のように働く．$j \neq i$ に対して $M_{n_j}(D_j)$ は N_i を 0 にし，$M_{n_i}(D_i)$ の行列は N_i のベクトルに働く行列のように振る舞う．

これ以降この節では，これまでの理論の例と応用について述べる．

有限の長さの任意の単純環に戻れば，ウェダーバーンの定理により，これはある多元体 D 上の全行列環 $M_n(D)$ と同型である．この環の左イデアルの記述はすでに終わっていて，それらと，反対多元体 D' 上の n 次元ベクト

ル空間の部分空間とは，包含関係を逆にする 1 対 1 対応の関係にある（つまり，$V_1 \subset V_2$ と ${}_{V_1}I \supset {}_{V_2}I$ が同値）．環全体（つまり多元体 D と次元 n）はこの半順序集合にどの程度まで反映しているだろうか？　多元体 D 上の n 次元ベクトル空間の線形部分空間の集合は，D 上の $n-1$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}(D)$ の線形部分空間の集合と一致する．こうして元（もと）の問題は本質的に射影幾何の公理的構造の問題になる．この問題の解答を思い起こそう．(以下に与える公理は独立でなく，直観的にもっとも納得しやすいように公理を選んである.)

$\mathfrak{P}$ を**半順序集合**とする．つまり，$\mathfrak{P}$ の元のある対 (x,y) に対して順序関係 $x \leq y$ が定義されて，以下の条件を満たすものとする．(a) $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ であり，(b) $x \leq y$ かつ $y \leq x$ であることと $x = y$ が同値である．

次の公理が満たされていると仮定する．

1. 元 $x_\alpha \in \mathfrak{P}$ の任意の集合に対して，元 y が存在して，すべての α に対して $y \geq x_\alpha$ であり，すべての α に対して $z \geq x_\alpha$ ならば $z \geq y$ である．この元 y を元 x_α の**和**と言い，$\bigcup x_\alpha$ と書く．特に，すべての $x \in \mathfrak{P}$ の和が存在する（「射影空間全体」）．これを I または $I(\mathfrak{P})$ と書く．

2. 元 $x_\alpha \in \mathfrak{P}$ の任意の集合に対して，元 y' が存在して，すべての α に対して $y' \leq x_\alpha$ であり，すべての α に対して $z' \leq x_\alpha$ ならば $z' \leq y'$ である．この元 y' を x_α の**共通部分**と言い，$\bigcap x_\alpha$ と書く．特に，すべての $x \in \mathfrak{P}$ の共通部分が存在する（「空集合」）．これを O または $O(\mathfrak{P})$ と書く．

これ以降，$y \leq x$ を満たす $x, y \in \mathfrak{P}$ に対して，$y \leq z \leq x$ を満たすすべての $z \in \mathfrak{P}$ の作る半順序集合を x/y と書く．明らかに，すべての x と y に対して，x/y は条件 1 と 2 を満たす．

3. 任意の $x, y \in \mathfrak{P}$ と $a \in x/y$ に対して，ある元 $b \in x/y$ が存在して，$a \cup b = I(x/y)$ かつ $a \cap b = O(x/y)$ を満たす．もし $b' \in x/y$ が同じ性質を持つ別の元で，$b \leq b'$ であれば，$b = b'$ である．

4. 長さの有限性．すべての鎖 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_r$ $(a_1 \neq a_2, a_2 \neq a_3, \ldots, a_{r-1} \neq a_r)$ の長さは有界である．

元 $a \in \mathfrak{P}$ が**点**と呼ばれるのは，$b \leq a$ かつ $b \neq a$ ならば $b = O$ となるときである．

5. 任意の 2 点 a, b に対して，$c \neq a$, $c \neq b$ かつ $c \leq a \cup b$ となる点 c がある.

条件 1–5 を満たす半順序集合を**射影空間**と言う．O から出発して $a \in \mathfrak{P}$ で終わる鎖の最大の長さとして，点に対する次元関数 $d(a)$ を定義することができ，関係式

$$d(a \cap b) + d(a \cup b) = d(a) + d(b)$$

を満たすことを証明することができる．数 $d(I)$ を $\mathfrak{P}$ の次元と言う．多元体 D 上の $n+1$ 次元ベクトル空間のすべての線形部分空間の作る空間 $\mathbb{P}^n(D)$ は，n 次元射影空間の例になっている.

次の定理が成り立つ.

定理 VII. 射影幾何の基本定理. (a) $n \geq 2$ **に対して,（半順序集合としての）射影空間** $\mathbb{P}^n(D)$ **は，数** n **と多元体** D **を決定する.**

(b) 射影空間 $\mathfrak{P}$ **の次元** n **が 3 以上であれば,（半順序集合として）ある多元体** D **上の射影空間** $\mathbb{P}^n(D)$ **と同型である.**

証明は射影空間に人工的に座標系を導入すること（つまり「座標化」すること）に基づいていて，そのアイデアはすでに平面における「線分の演算」の中で見つけることができる（§2 図 5 と 6 参照）．その計算法でのように，座標として現れる元の集合はかなり容易に作図することができる．この集合の上に加法と乗法の演算が定義されるが，難しいのは多元体の公理を確かめるという部分である．ここで鍵となるのは,「デザルグの定理」として知られる次の定理である.

定理 VIII. デザルグの定理. 2 つの三角形 ABC **と** $A'B'C'$ **の対応する頂点を結ぶ 3 直線** AA', BB', CC' **が 1 点** O **で交われば，対応する辺の 3 交点は 1 直線上にある（図 11 参照）.**

しかしながら，この定理を射影空間の公理から導くことができるのは，空間の次元が ≥ 3 のときだけである．2 次元（つまり平面）のときは，これは公理からは出てこず，あらゆる射影平面が $\mathbb{P}^2(D)$ と同型なわけではない．そうなるための必要十分条件は，上の命題が成り立つということであって，こ

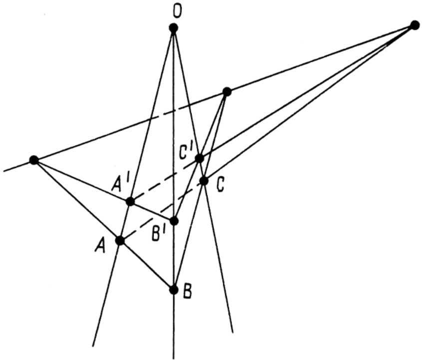


図 11

れを余分の公理，**デザルグの公理**として追加しなければならない．

これらの結果は，完全に任意な多元体の射影幾何における役割を特徴付けている．つまり，n 次元射影幾何の公理系（$n = 2$ のときはデザルグの公理も一緒にして）の，すべての非同値な実現を具体的にリストできるようになる．多元体の代数的な性質が，対応する幾何の幾何的な性質として現れるのは自然なことである．たとえば，多元体 D の可換性は，射影空間 $\mathbb{P}^n(D)$ $(n \geq 2)$ において次の条件が成り立つことと同値である．

定理 IX．パッポスの定理．6 角形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ の頂点が 3 つずつ 2 本の直線の上にあれば，対辺の 3 つの交点，つまり P_1P_2 と P_4P_5 との，P_2P_3 と P_5P_6 との，P_3P_4 と P_6P_1 との交点は 1 直線上にある（図 12 参照）．

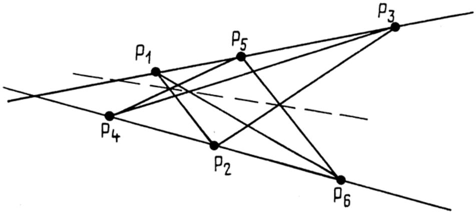


図 12

多元体 D の標数が 2 であるという条件は，次の公理と同値である．

公理 X． ファノの公理．**平面四辺形** $ABCD$ **の対辺，**AB **と** DC **の，**AD **と** BC **の，**AC **と** BD **の 3 つの交点は 1 直線上にある．**

図 13 でこの性質が成り立っていないのは，実数体の標数が 2 でないからである．

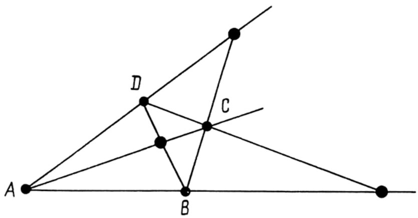


図 13

§1 で考えた幾つかの幾何的公理の有限のモデル（図 1 と 2 参照）は，同じアイデアの範疇にある．これらの図は，体 $\mathbb{F}_2$ と $\mathbb{F}_3$ の有限アフィン平面であり，つまり，射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ と $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ から 1 本の直線とその上の点を取り除いて得られるものである（これらは，残りの点と直線の幾何の観点からは「無限遠」にあることになる）．

有限の長さの単純環と上に扱った理論の，無限次元への一般化にはいろいろとある．その中には，半単純条件（例 2）や半単純環が単純であるための判定条件（定理 VI）から始めるものがある．こうして次の定義が得られる．

複素ヒルベルト空間上の有界作用素の環の部分環 R は，作用素 $\varphi(\in R)$ とともに共役作用素 φ^* を含み，R の中心がスカラー作用素だけからなり，R が自然な位相（いわゆる弱位相）で閉集合であるとき，**因子**であると言う．

有限の長さの単純環が公理 1–5 を満たす射影幾何を定義するのと同じようにして，任意の因子は類似の公理を見たす半順序集合を定義する．この集合の上にも次元関数が定義されるが，今度はいろいろな場合が起こり得る．

場合 I_n ．次元は $0, 1, 2, \ldots, n$ の値をとる．因子は環 $M_n(\mathbb{C})$ と同型で

ある．

場合 I_∞．次元は $0,1,2,\ldots,\infty$ の値をとる．この場合は，因子は無限次元ヒルベルト空間の有界作用素全体の環と同型である．

場合 II_1．次元は区間 $[0,1]$ に値をとる．

場合 II_∞．次元は区間 $[0,\infty]$ に値をとる．

場合 III．次元の値は 0 と ∞ だけである．

II_1, II_∞, III に対応する半順序集合は，高度に自明でない射影平面の無限次元の類似物であり（そこでは「部分空間」の次元は任意の実数になり得ることを強調しておく），**連続幾何**と呼ばれる．

以下では，体 K 上ランク有限の代数に制限して考えることにする．

例 6. §8 の例 10 と 11 で，L が計量 $x_1^2+\cdots+x_{2n}^2$ を持つ $2n$ 次元の実ベクトル空間のとき，クリフォード代数 $C(L)$ は全行列環 $M_{2^n}(\mathbb{R})$ と同型であることを見た[4]．したがって，この代数には次数 2^n の（同型を除いて）一意的な既約表現がある．こうして，

$$x_1^2+\cdots+x_{2n}^2=(x_1\Gamma_1+\cdots+x_{2n}\Gamma_{2n})^2$$

と書くことができる．ここで，$\Gamma_1,\ldots,\Gamma_{2n}$ は 2^n 次正方行列である．これらの行列は，$\Gamma_i\mapsto C\Gamma_iC^{-1}$ という変換を除いて一意的に定まる．2^n より低次の行列では，このような表現を与えることはできない．

さて，体 K を代数的閉体とする．すると，K 上の半単純代数とその表現の理論は特に具体的な性格のものになる．このことの基礎には，次の単純な事実がある．

定理 XI. 代数的閉体 K 上の有限ランクの多元体は K 自身と一致する．

実際，多元体 D のランク n であり，$a\in D$ であれば，元 $1,a,a^2,\ldots,a^n$ は K 上 1 次従属でなければならない．それゆえ，次数 $\le n$ の多項式 $F\in K[t]$ で，恒等的には 0 でなく，$F(a)=0$ となるものが存在する．K が代数的閉体だから，$F(t)=\gamma\prod(t-\alpha_i)$ であり，したがって $\prod(a-\alpha_i)=0$ となる．

4 ［訳註］§8 例 11 の最後の訳註を参照．

D が多元体なので，ある i に対して $a-\alpha_i=0$ であり，したがって $a \in K$ である．こうして次の結果が得られる．

定理 XI′. 代数的閉体 K 上では，有限ランクの単純代数は環 $M_n(K)$ に同型で，半単純代数はそのような環の直和に同型である．

前に，式 (7′) で，代数 $M_n(K)$ の正則表現の具体的な既約分解を与えた．そのことから，その正則表現が n 個の同値な n 次元表現（全行列環 $M_n(K)$ 上の加群としての n 次元空間 K^n に対応するもの）の和であることがわかる．もし $R \cong M_{n_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_p}(K)$ であれば，R は p 個の既約な n_i 次元表現 N_i（全行列環 $M_{n_i}(K)$ の既約表現に対応するもの）を持ち，R の正則表現は

$$R \cong N_1^{n_1} \oplus N_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus N_p^{n_p} \qquad (n_i = \dim N_i)$$

の形になる．中心の分解に関しては可能性は 1 つしかなく，

$$Z(R) \cong K^p$$

となる．

結果として，代数的閉体上の有限ランクの半単純代数の表現論は，以下の定理に帰着する．

定理 XII. あらゆる表現は既約表現の直和である．

定理 XIII. すべての既約表現は，正則表現の既約分解の成分の中に含まれる．ここで互いに非同値な成分の数は，代数の中心のランクに等しい．

定理 XIV. あらゆる既約表現は，正則表現の中に，その次元と同じ数だけ含まれる．

定理 XV. バーンサイドの定理．既約表現の次元の平方の和は，代数のランクに等しい．つまり，式

$$n = n_1^2 + \cdots + n_p^2$$

が成り立つ．

表現 $\varphi : R \to M_n(K)$ を具体的に与えるために，行列 $\varphi(a)$, $a \in R$ のトレースを使う．関数 $\mathrm{Tr}(\varphi(a))$ は R 上で定義され，線形であるので，R の基底の元での値によって与えられる．$\mathrm{Tr}(CAC^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$ であるから，同値な表現のトレースは同じである．関数 $\mathrm{Tr}(\varphi(a))$ を $\mathrm{Tr}_\varphi(a)$ と書く．

もし表現 φ が他の 2 つの表現の直和 $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ であれば，明らかに $\mathrm{Tr}_\varphi(a) = \mathrm{Tr}_{\varphi_1}(a) + \mathrm{Tr}_{\varphi_2}(a)$ である．既約表現のトレースを代数 R の指標と言う．$\chi_1(a), \chi_2(a), \dots, \chi_p(a)$ を p 個の既約表現 $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ に対応する指標とする．どんな表現 φ も既約表現の直和に分解し，φ_i がその中に m_i 回現れれば，

$$\mathrm{Tr}_\varphi(a) = m_1\chi_1(a) + \cdots + m_p\chi_p(a) \tag{8}$$

となる．R の単純な代数の直和としての分解 $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_p$ において，既約表現 φ_i はすべての直和因子 R_j $(i \neq j)$ を 0 に写す．これと (8) とを一緒に考えれば次の結果が得られる．

定理 XVI. 半単純代数の表現はそのトレース関数 $\mathrm{Tr}_\varphi(a)$ によって一意的に与えられる．

ここで与えた結果には，主に群環 $R = K[G]$ という特別な場合に，非常に多くの応用がある．これらについては後で述べるが，今のところは全行列環に対するまったく初等的な 1 つの応用を述べることにする．

定理 XVII. バーンサイドの定理．代数的閉体 K 上の全行列環 $\mathrm{End}_K(L)$ の既約な部分代数は $\mathrm{End}_K(L)$ に一致する．

証明． 定理の条件の意味は，R の n 次元空間 L における表現 φ が埋め込み $R \to \mathrm{End}_K(L)$ によって定義されていれば，φ は既約であるということである．任意の $x \in L$ に対して，$a \mapsto ax$ という写像は，R 上の加群として，R から単純加群 L への準同型を定めている．x として，L の基底の n 個の元 $e_1, \dots, e_n$ をとれば，n 個の準同型 $f_i : R \to L$ が得られ，つまり，1 つの準同型 $f : R \to L^n$, $f = f_1 + \cdots + f_n$ が得られる．ある $a \in R$ に対して $f(a) = 0$ であれば，$f_i(a) = 0$ であり，つまり $ae_i = 0$ なので，すべての $x \in L$ に対して $ax = 0$ となる．しかし $R \subset \mathrm{End}(L)$ なので，$a = 0$

となる．したがって，R 加群として $R \subset L^n$ である．L は単純加群だから，このことから，R が加群として半単純であり，それゆえ代数 R は半単純で，そして加群として，ある k に対して $R \cong L^k$ である．しかし定理 XV によって，$k = n = \dim L$ である．それゆえ R のランクは n^2 となり，したがって $R = \mathrm{End}_K(L)$ となる．

説明のために，この結果の 1 つの有効な応用を述べよう．

定理 XVIII．バーンサイドの定理． G **が標数 0 の体** K **上の** n **次正方行列を元とする群で，ある整数** $N > 0$ **が存在して，すべての** $g \in G$ **に対して** $g^N = 1$ **となるなら，**G **は有限群である．**

この証明には，群論のごく初等的な概念をいくつか使う．明らかに，必要ならば体 K の拡大をとることにより，K を代数的閉体と仮定できる．R を，

$$\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k \qquad (\alpha_i \in K,\ g_i \in G)$$

の形のすべての組み合わせの作る集合とすると，明らかに，R は K 上の代数であり，$R \subset M_n(K)$ である．最初に，代数 R が既約な場合を考える．すると，前のバーンサイドの定理によって，$R = M_n(K)$ となる．仮定により，どんな元 $g \in G$ の固有値も 1 の N 乗根である．n 次行列のトレース $\mathrm{Tr}(g)$ は n 個の固有値の和であり，$\mathrm{Tr}(g)$ のとりうる値は高々 N^n 通りである．空間 $M_n(K)$ 上の双線形形式 $\mathrm{Tr}(AB)$ が非退化であることは容易に確かめられる．$R = M_n(K)$ なので，n^2 個の元 $g_1, \ldots, g_{n^2} \in G$ で，$M_n(K)$ の基底をなすものが存在する．双線形形式 $\mathrm{Tr}(AB)$ に関する双対基底を $e_1, \ldots, e_{n^2}$ とする．$g = \sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i e_i$ を任意の元 $g \in G$ のこの基底に関する表示とすれば，$\alpha_i = \mathrm{Tr}(g g_i)$ である．つまり，係数 α_i が有限個の値しかとり得ないので，G は有限群となる．

代数 R が可約ならば，群 G の元に対応する行列は同時に

$$\begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

の形にすることができる．帰納法を使えば，$A(g)$ と $B(g)$ がすでに有限群

G' と G'' をなすことが証明されていると仮定できる．$f(g) = (A(g), B(g))$ で与えられる準同型 $f : G \to G' \times G''$ を考えると，その核は行列

$$\begin{pmatrix} E & C(g) \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

に対応する元 $g \in G$ からなっている．体 K の標数が 0 であれば，$C(g) \neq 0$ であるような行列が有限位数になり得ないことは容易にわかる．m 乗しても，単に $C(g)$ が m 倍されるだけだからである．それゆえ，f の核は単位元だけからなり，つまり，G は有限群 $G' \times G''$ に含まれ，それゆえそれ自身有限群になる．

§11. 有限ランクの多元体

ウェダーバーンの定理によって，体 K 上の有限ランクの半単純代数の研究は，完全に，同じ体上の有限ランクの多元体の研究に帰着されることになった．これ以降，この問題を扱うことにする．D が K 上の有限ランクの多元体で，L が D の中心なら，L は K の有限拡大であり，D を L 上の代数と考えることができる．それゆえ問題は 2 つに分けられる．つまり，有限拡大体の研究（これは可換代数の問題である）と，中心である体上の有限ランクの多元体の研究の 2 つに分けられる．体 K 上の有限ランクの代数 D の中心が K であるとき，D を K 上の中心的な代数と呼ぶ．

与えられた体 K 上の有限ランクの中心的多元体の存在とその構造の問題は，個々の体 K の性質に非常に本質的に依存している．この方向では，すでに非常に単純な 1 つの結果に出合っていて，それは，代数的閉体 K 上には K 以外には有限ランクの多元体は存在しないというものであった．特に，このことは複素数体に対して成り立っている．

実数体の場合には状況は少し複雑になる．

定理 I. フロベニウスの定理．実数体 $\mathbb{R}$ 上の有限ランクの多元体は，$\mathbb{R}$ 自身と，複素数体 $\mathbb{C}$ と四元数体 $\mathbb{H}$ だけである．

さらに 2 つ，状況が簡単な場合がある．

定理 II. ウェダーバーンの定理．有限体 K 上には，有限ランクの中心的多元体は，K 自身を除いて存在しない．

言い換えれば，有限な多元体は可換である．これはもちろん射影幾何的に興味深い．というのは，このことから，次元が >2 の有限射影幾何ではパッポスの定理が他の公理から導き出されることがわかるからである．(2 次元で

はデザルグの公理から従う.)

定理 III．ツェン（曽烱之）の定理．K が代数的閉体で，C が K 上の既約な代数曲線であれば，体 $K(C)$ 上には $K(C)$ 自身以外に有限ランクの中心的多元体は存在しない．

この 3 つの場合に，ある体 K の上では K 自身以外に有限ランクの中心的多元体が存在しないということを述べたが，これは次の一般的な性質によってまとめることができる．

体 K が準代数的閉体であるとは，変数の数 n より低い次数のあらゆる斉次多項式 $F(t_1, \dots, t_n) \in K[t_1, \dots, t_n]$ に対して，方程式

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

が K の中に 0 でない解を持つときに言う．

任意の準代数的閉体 K 上の有限ランクの中心的多元体は K に一致することを示すことができる．一方，上に考察したそれぞれの体，つまり，代数的閉体，有限体，それに代数的閉体 K と既約な代数曲線 C に対する関数体 $K(C)$ は，準代数的閉体である．この性質から始めてツェンの定理を証明できるし，ウェダーバーンの定理の可能な証明法の 1 つでもある．有限体が準代数的閉体であるという定理は,「シュヴァレーの定理」と呼ばれている．体 $\mathbb{F}_p$ の場合には，このことは合同類の興味ある性質である．準代数的閉体であるという性質は，代数的閉体であることを直接的に弱めたものである．代数的閉体の次の特徴付けから始めれば，このことは明らかになる．

定理．体 K が代数的閉体であるためには，変数の数 n 以下の次数のあらゆる斉次多項式 $F(t_1, \dots, t_n) \in K[t_1, \dots, t_n]$ に対して，方程式

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{1}$$

が K の中に 0 でない解を持つことが必要十分である．

証明． 明らかに，代数的閉体 K に対して方程式 (1) は 0 でない解を持つ．そこで，K が代数的閉体でないとする．そのとき，K 上に次数 $n > 1$ の既約な多項式 $P(t)$ が存在する．環 $L = K[t]/(P)$ は体 K の n 次拡

大体であり，それゆえ K 上ランク n の代数である．この代数の正則表現を考えて，各元 $x \in L$ に行列 $A_x \in M_n(K)$ を対応させる．行列 A_x の行列式を x のノルムと呼び，$N(x)$ と書く．表現（と行列式）の性質から，$N(1) = 1$, $N(xy) = N(x)N(y)$ となる．このことから，$x \neq 0$ ならば $N(x)N(x^{-1}) = 1$ であり，それゆえ $N(x) \neq 0$ となる．L/K の任意の基底 $e_1, \ldots, e_n$（たとえば，$K[t]$ の元 $1, t, \ldots, t^{n-1}$ の像）を考えて，任意の元 $x \in L$ を $x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ $(x_i \in K)$ と書く．$N(x)$ が $x_1, \ldots, x_n$ に関する n 次多項式であることが容易にわかるので，

$$F(x_1, \ldots, x_n) = N(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n)$$

とおけば，これは解を持たない方程式 (1) の例になっている．

さて，その上に有限ランクの中心的多元体が存在するような体に進もう．これまでのところそのような体を 1 つ知っている．それは実数体 $\mathbb{R}$ で，$\mathbb{R}$ 上にはランク 1 の中心的多元体（$\mathbb{R}$ 自身）とランク 4 の中心的多元体（四元数 $\mathbb{H}$）がある．次の結果が示すように，これらの数が現れるのはまったくの偶然ではない．

補題．中心的な単純代数のランクは完全平方である．

この証明は，体の拡大という重要な操作に基づいている．R が体 K 上有限ランクの代数で，L が K の任意の拡大であるとして，加群 $R \otimes_K L$ を考える（§5 参照）．その生成元 $a \otimes \xi$, $a \in R$, $\xi \in L$ の上で積を

$$(a \otimes \xi)(b \otimes \eta) = ab \otimes \xi\eta \qquad (a, b \in R,\ \xi, \eta \in L)$$

と定義する．これによって $R \otimes_K L$ は（$1 \otimes L$ として）L を含む環になり，したがって L 上の代数となる．$e_1, \ldots, e_n$ が R の K 上の基底であれば，$e_1 \otimes 1, \ldots, e_n \otimes 1$ が $R \otimes_K L$ の L 上の基底である．それゆえ，$R \otimes_K L$ の L 上のランクは R の K 上のランクに等しい．R から $R \otimes_K L$ に移ることを**基礎体の拡大**と言う．簡単に言えば，$R \otimes_K L$ は，R と同じ乗積表を持つ，L 上の代数である．

次の主張を証明するのは難しくない．

定理 IV．代数が中心的かつ単純であるという性質は，基礎体を拡大しても保たれる．

さて補題の証明に戻って，L を K の代数的閉包とする．一般論により $R\otimes_K L \cong M_n(L)$ であり，それゆえ R の K 上のランクは（$R\otimes_K L$ の L 上のランクと等しく）n^2 となって，補題の証明が得られる．

こうして四元数体は，自明でない中心的多元体のランクの可能な最小値を実現したものになっている．おもに整数論的に興味のある場合で次に難しいのは，§7 で導入した p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ である．

定理 V．ハッセの定理．任意の n に対して，体 $\mathbb{Q}_p$ 上にはランク n^2 の中心的多元体が $\varphi(n)$ 個ある（ここで φ はオイラーの関数である）．

定理の証明をすると，このような多元体 D に，D を決定するような，何かある 1 の原始 n 乗根を対応させる方法がわかる[1]．この 1 のベキ根は多元体 D の不変量と呼ばれ，$\mu_p(D)$ と書かれる．

簡単な例を考えよう．標数 $\neq 2$ の任意の体 K に対して，$a,b\in K$ を 0 でない 2 元として，K 上ランク 4 の代数を，基底 $1,i,j,k$ と乗積表

$$i^2=a,\ j^2=b,\ ji=-ij=-k$$

によって定義する（残りの積は結合律を用いて計算することができる[2]）．こうして得られた代数を**一般四元数代数**と言い，(a,b) と書く．たとえば $\mathbb{H}=(-1,-1)$ である．代数 (a,b) が単純かつ中心的であり，ランク 4 の任意の中心的な単純代数がこの形に表わされることが容易に証明される．こうして環の一般論によって，(a,b) は多元体であるかまたは $M_2(K)$ に同型である．この 2 つの場合をどのように区別するかを明らかにしよう．このために，四元数のアナロジーで，元 $x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ の共役を，$\bar{x}=\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$ と置く．

1　[訳註] もちろん 1 の原始 n 乗根の数は $\varphi(n)$ 個である．

2　[訳註] たとえば，$k^2=(ij)(ij)=-(ji)(ij)=-j((ii)j)=-j(aj)=-aj^2=-ab$，$ik=-ki=aj$，$kj=-jk=bi$.

$$\overline{xy} = \bar{y}\bar{x} \quad \text{かつ} \quad x\bar{x} = \alpha^2 - a\beta^2 - b\gamma^2 + ab\delta^2 \in K \tag{2}$$

となることは容易にわかる．$N(x) = x\bar{x}$ と置くと，(2) から $N(xy) = N(x)N(y)$ となる．それゆえ，1つでも $x \neq 0, N(x) = 0$ があれば，(a, b) は多元体ではない．$x \neq 0$ かつ $\bar{x} \neq 0$ であっても $x\bar{x} = 0$ となるからである．一方，あらゆる $x \neq 0$ に対して $N(x) \neq 0$ であれば，$x^{-1} = N(x)^{-1}\bar{x}$ となり，(a, b) は多元体である．こうして，(a, b) が多元体であるための必要十分条件は，K の元 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に関する方程式 $\alpha^2 - a\beta^2 - b\gamma^2 + ab\delta^2 = 0$ の解が 0 だけであることとなる．この方程式はさらに簡単に

$$\alpha^2 - a\beta^2 = b(\gamma^2 - a\delta^2)$$

の形に書くことができ，これはまた

$$b = \frac{\alpha^2 - a\beta^2}{\gamma^2 - a\delta^2} = \frac{N(\alpha + \beta i)}{N(\gamma + \delta i)} = N\left(\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}\right) = N(\xi + \eta i) = \xi^2 - a\eta^2$$

となる．ここで，$\xi + \eta i = \dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$ である．こうして，(a, b) が多元体であるための条件は,「方程式 $\xi^2 - a\eta^2 = b$ が K に解を持たない」という形になる．この方程式を斉次形に書くと

$$\xi^2 - a\eta^2 - b\zeta^2 = 0 \tag{3}$$

となる．これが K の中に 0 でない解を持ってはならないが，解を持つような場合には $(a, b) \cong M_2(K)$ となる．(3) が 0 でない解を持てば，$\xi \neq 0$ を満たすような解も存在することが容易に証明される[3]．このとき，(3) は

$$ax^2 + by^2 = 1 \tag{4}$$

という方程式に帰着される．

ここで K が有理数体 $\mathbb{Q}$ であるとする．方程式 (4) はまさに，§7 の定理 III として定式化したルジャンドルの定理が問題とした方程式である．その定理によれば，(4) が $\mathbb{Q}$ に解を持つことは，$\mathbb{R}$ とすべての体 $\mathbb{Q}_p$ に解を持つこと

---

[3] ［訳註］$a\eta^2 + b\zeta^2 = 0$ の 0 でない解 (η_0, ζ_0) があったとする．$c = \eta_0/\zeta_0$ と置くと，$b = -ac^2$ であり，$c\zeta$ を改めて ζ と置くと，(3) は $\xi^2 = a\eta^2 - a\zeta^2 = a(\eta + \zeta)(\eta - \zeta)$ となるが，これにはたとえば $(2a, a+1, a-1)$ という解がある．K の標数が $\neq 2$ であることに注意する．

と同値である．この形では，この定理は（$a, b \in \mathbb{Q}$ に対する）一般四元数代数 (a, b) に関する情報を与えてくれる．上に述べたことから，代数 $C = (a, b)$ が $M_2(\mathbb{Q})$ に同型であることと，$C \otimes \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$ かつすべての p に対して $C \otimes \mathbb{Q}_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$ であることとが同値であることを意味している．この議論の筋道をさらに進めて，$\mathbb{Q}$ 上のすべての一般四元数代数を記述することができる．すなわち，このような 2 つの代数 $C = (a, b)$ と $C' = (a', b')$ が同型であることと，$C \otimes \mathbb{R} \cong C' \otimes \mathbb{R}$ かつすべての p に対して $C \otimes \mathbb{Q}_p \cong C' \otimes \mathbb{Q}_p$ であることとが同値であることを示すことができる．言い換えれば，$\mathbb{Q}_p$ 上のランク 4 の多元体の不変量 μ_p を考え（定義により -1 になる），$\mathbb{Q}$ 上の中心的単純代数 C に対して

$$\mu_p(C) = \mu_p(C \otimes \mathbb{Q}_p) = -1 \qquad (C \otimes \mathbb{Q}_p \text{が多元体のとき}),$$

$$\mu_p(C) = 1 \qquad (C \otimes \mathbb{Q}_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p) \text{ のとき})$$

と置き，さらに

$$\mu_{\mathbb{R}}(C) = -1 \qquad (C \otimes \mathbb{R} \text{ が多元体（つまり } \cong \mathbb{H}\text{）のとき}),$$

$$\mu_{\mathbb{R}}(C) = 1 \qquad (C \otimes \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R}) \text{ のとき})$$

と置くとき，上の結果は次のように言い換えられる．

定理 VI. $\mathbb{Q}$ **上ランク 4 の多元体** C **は** $\mu_{\mathbb{R}}(C)$ **とすべての** p **に対する** $\mu_p(C)$ **によって決定される．これを** C **の不変量の集合と呼ぶ．**

この不変量の集合はどんなものであり得るだろうか？　すべての $\mu_{\mathbb{R}}(C)$ と $\mu_p(C)$ が 1 になることはあり得ないことはわかっている（そうだとすると，ルジャンドルの定理により，C が多元体でなくなるから）．さらに，有限個の素数 p に対してだけ $\mu_p(C) = -1$ となることが容易に証明される．これら以外にもう 1 つだけ条件があることがわかる．

定理 VII. $\mu_{\mathbb{R}}, \mu_p = \pm 1$ **（各素数** p **に対して）を任意に選んだ集合が，**$\mathbb{Q}$ **上のあるランク 4 の中心的多元体の不変量の集合であるためには，(a) すべての** $\mu_{\mathbb{R}}$ **と** μ_p **が 1 であることはなく，(b) 有限個だけが -1 であり，(c)**

$$\mu_{\mathbb{R}} \prod_p \mu_p = 1 \tag{5}$$

であることが必要十分である．

驚くべきことに，関係式 (5) はまさにガウスの平方剰余の相互法則の言い換えであることがわかり，こうしてこの法則は $\mathbb{Q}$ 上の多元体の理論の中心的な結果の 1 つになる．

これまでの結果はただちに，$\mathbb{Q}$ 上の有限ランクの任意の中心的な単純代数に一般化される．C を $\mathbb{Q}$ 上の有限ランク n^2 の中心的な単純代数とする．代数 $C \otimes \mathbb{R} = C_{\mathbb{R}}$ は，$M_n(\mathbb{R})$ に同型であるか $M_{n/2}(\mathbb{H})$ に同型であるかであり，前者の場合 $\mu_{\mathbb{R}}(C) = 1$ と置き，後者の場合は定義により $\mu_{\mathbb{R}}(C) = -1$ である．同様に，任意の素数 p に対して，代数 $C \otimes \mathbb{Q}_p$ は $M_k(C_p)$ の形をしている．ここで，C_p は $\mathbb{Q}_p$ 上の中心的多元体である．$\mu_p(C) = \mu_p(C_p)$ と置くと（ハッセの定理 V 参照），次の結果が得られる．

定理 VIII. ハッセ–ブラウワー–ネーターの定理. $C \cong M_n(\mathbb{Q})$ であることと，$C_{\mathbb{R}} \cong M_n(\mathbb{R})$ かつすべての p に対して $C \otimes \mathbb{Q}_p \cong M_n(\mathbb{Q}_p)$ であること，つまり，すべての p に対して $\mu_{\mathbb{R}}(C) = \mu_p(C) = 1$ であることとは必要十分である．

ハッセの定理. $\mathbb{Q}$ 上の **2** つの中心的な単純代数 C と C' が同型であることは，$C \otimes \mathbb{R} \cong C' \otimes \mathbb{R}$ かつすべての p に対して $C \otimes \mathbb{Q}_p \cong C' \otimes \mathbb{Q}_p$ であること，すなわち，$\mu_{\mathbb{R}}(C) = \mu_{\mathbb{R}}(C')$ かつすべての p に対して $\mu_p(C) = \mu_p(C')$ であることと同値である．数 $\mu_{\mathbb{R}}$ と（すべての p に対する）μ_p が $\mathbb{Q}$ 上のある中心的多元体 C によって，$\mu_{\mathbb{R}} = \mu_{\mathbb{R}}(C)$, $\mu_p = \mu_p(C)$ の形で実現されることは，**(a)** 有限個の素数 p に対してだけ $\mu_p \neq 1$ であり，**(b)**

$$\mu_{\mathbb{R}} \prod_p \mu_p = 1 \tag{6}$$

を満たすことと必要十分である．

体 $\mathbb{Q}$ の有限拡大（つまり代数的数体）K に対して，まったく同様の結果が成り立つ．それらは類体論の一部になっている．任意の代数的数体に対する関係式 (6) のアナロジーは，ガウスの平方剰余の相互法則の高度な一般化になっている．

有理数体上の多元体の構造についてここで与えた描像は，まさに体 K 上の多元体の構造が K の詳細な性質にいかに密接に関係しているかの例と考えることができる．

もう 1 つの例として，C を実代数曲線とし，体 $\mathbb{R}(C)$ 上有限ランクの中心的多元体の構造を考えよう．この場合，任意の中心的多元体は一般四元数代数であり，さらに $(-1,a)$ ($a \in \mathbb{R}(C)$, $a \neq 0$) という形をしている．代数 $(-1,a)$ が $M_2(\mathbb{R}(C))$ と同型であることは，(射影平面の無限遠点を含む) あらゆる点 $x \in C$ に対して $a(x) \geq 0$ であることとは同値である．C 上の関数 $a(x)$ は C の有限個の点 $x_1, \ldots, x_n$ で符号を変える．(図 14 は曲線が

$$y^2 + (x^2-1)(x^2-4) = 0$$

で，関数が $a = y$ の場合を表わしている.) 多元体 $(-1,a)$ は符号の変わるこれらの点 $x_1, \ldots, x_n$ で決定される．より複雑だが，より興味深いのは，代数曲面 C に対する体 $\mathbb{C}(C)$ の例である．この場合の多元体の構造は曲面の非常に細密な幾何学的性質を反映している．これらの問題には §12 と §22 で戻ることにする．

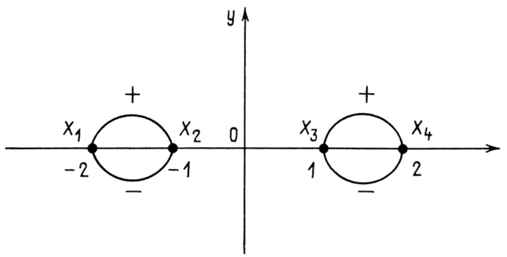


図 14

§ 12.　群の概念

変換群の概念から始めよう．群の概念は最初この形で生まれ，数学や数理物理で一番頻繁に現れるのもこの形である．

集合 X の**変換**とは，X から自分自身への 1 対 1 写像 $f: X \to X$ のことである．つまり，逆写像 $f^{-1}: X \to X$, $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e$ が存在する写像のことである．ここで，$f \circ g$ は写像の積（合成写像，つまり g と f を順に働かせて得られる写像のこと）

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad (x \in X) \tag{1}$$

を表わし，e は恒等写像

$$e(x) = x \qquad (x \in X)$$

である．

X の変換の集合 G が**変換群**と呼ばれるのは，G が恒等変換 e を含み，任意の $g \in G$ に対し逆変換 g^{-1} を含み，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し積 $g_1 g_2$ を含むときである．

普通は，これらの条件は当たり前に満たされるものである．と言うのも，G はある性質を保つ変換の全体として定義されるからである．たとえば，スカラー倍とベクトルの和を保つようなベクトル空間の変換（つまり，$g(\alpha x) = \alpha g(x)$ かつ $g(x+y) = g(x)+g(y)$ を満たす変換）を考えると，これらはベクトル空間の非退化な線形変換の群をなす．ユークリッド空間の点の間の距離 $\rho(x, y)$ を保つ変換（つまり，$\rho(g(x), g(y)) = \rho(x, y)$ を満たす変換）は**運動群**をなす．すべての変換がある 1 つの点を固定するとすれば，**直交変換群**が得られる．

ある対象を保つようなあれこれの変換の群は，**対称性の集まり**という解釈ができることが多い．たとえば，二等辺三角形は不等辺三角形より対称性が高く，正三角形は正三角形でない二等辺三角形より対称性が高いという事実

は，その三角形をそれ自身に写す平面の運動の個数がこの 3 つの型の三角形に対して異なるということとして「定量化」される．(a) 不等辺三角形の場合は恒等写像だけからなり，(b) 正三角形でない二等辺三角形の場合は恒等写像と対称軸に関する鏡映からなり，(c) 正三角形の場合は，恒等写像と中心 0 の周りの 120° と 240° の回転，3 つの対称軸に関する鏡映という，6 つの変換からなっている（図 15a, b, c 参照）．

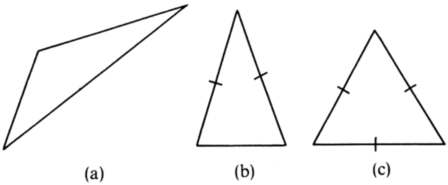


図 15

いろいろな型の対称性の典型的な例をいくつか挙げよう．

平面の模様（パターン）の対称性の群は，模様をそれ自身に写す平面のすべての移動からなっている．たとえば，図 16 に描いた模様の対称性の群は，ベクトル OA の平行移動（または，ずらし）と，ベクトル OB の平行移動の後に軸 OB に関する鏡映をしたものと，それらのあらゆる組み合わせからなっている．

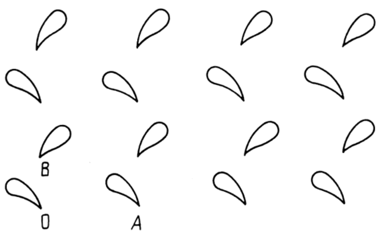


図 16

分子の対称性というのは，分子のあらゆる原子を同じタイプの原子に写し，

原子の間の原子価結合を保つような空間の運動と考えられている．たとえば，リンの分子はある正 4 面体の頂点の位置にある 4 つの原子からなっており，その対称性の群は，次節 §13 で詳しく議論する正 4 面体の対称群と一致する．

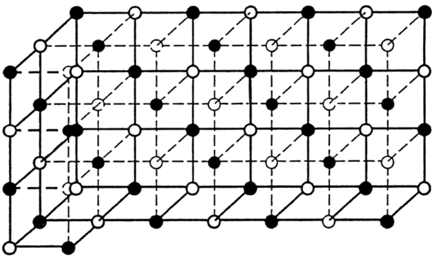


図 17

結晶は高次の対称性を持っていて，**結晶の対称群**は結晶の重要な特性である．ここで，対称性ということを，結晶のすべての原子の位置とそれらの間の関係を保ち，原子のそれぞれを同じ元素の原子に写すような，空間の運動と考えている．例として，図 17 に描いた食塩 NaCl の結晶の対称群を述べよう．これは隣接する立方体からなり，その頂点をナトリウム原子 (○) と塩素原子 (●) が交互に占めている．対称性の全体は（原子の 1 つを原点にし，立方体の辺に沿って軸とし，辺の長さを 1 と考えるような座標系をとると），座標軸の交換，座標平面に関する鏡映，整数座標を持つベクトルでの平行移動によって与えられる．これは

$$x_1' = \varepsilon x_{i_1} + k,$$
$$x_2' = \eta x_{i_2} + \ell,$$
$$x_3' = \zeta x_{i_3} + m$$

という式で表わすことができる．ここで，(i_1, i_2, i_3) は $(1, 2, 3)$ の置換で，$\varepsilon, \eta, \zeta = \pm 1$ であり，$k, \ell, m \in \mathbb{Z}$ で，さらに $k + \ell + m$ が偶数である．

代数的な表示や解析的な表示もまた対称性を持つことがある．多項式 $F(x_1, \ldots, x_n)$ の**対称性**とは，F を保つ不定元 $x_1, \ldots, x_n$ の置換のことである．これからたとえば，すべての置換によって保たれるものとして，**対称関数**と

いう言葉が生まれる．一方，関数 $\prod_{i<k}(x_i - x_k)$ は偶置換でだけ保存される．一般に，ある集合 X の上の関数 F の対称性を，F を保つ X の変換のことと考えることができる．上の例では，X は有限集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ である．

3 次元空間上の $f(x^2 + y^2 + z^2)$ という形の関数は，すべての直交変換を対称性としている．このような対称性がしばしば物理現象の中に反映されている．たとえば，**E. ネーターの定理**によれば，多様体 X 上の力学系が X の 1 パラメーター変換群 $\{g_t\}$ を対称性とするようなラグランジアン $\mathcal{L}$ によって記述されていれば，この力学系には容易に書き下すことのできる第 1 積分がある．それで，質点系の運動の場合に，$\mathcal{L}$ の平行移動に関する不変性から**運動量の保存法則**[1]が導かれ，回転に関する不変性から**角運動量の保存法則**が導かれる．

これまでに考察してきた，体，環，代数，加群といった，任意のタイプの代数的な対象に対して，対称性とは基本演算を保つような対応する集合の変換のことである．この場合には**自己同型**と呼ばれている．

こうして，体 K 上の n 次元ベクトル空間 F の自己同型は非退化な線形変換であり，その群を $GL(F)$ または $GL(n, K)$ と書く．基底が選ばれていれば，これらは非退化な n 次行列で与えられる．同様に，可換環 A 上の自由加群 A^n の自己同型は群 $GL(n, A)$ をなし，行列式が A の可逆元であるような A の元を成分とする行列によって与えられる．行列式が 1 の行列の作る群を $SL(n, A)$ と書く．

環（特に体）K の自己同型 σ は

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b) \quad \text{かつ} \quad \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \tag{2}$$

を満たす変換 σ のことである．たとえば $R = M_n(K)$ であれば，非退化な行列 $c \in GL(n, K)$ は R の自己同型 $\sigma(a) = cac^{-1}$ を定める．

変換 $\sigma(z) = \bar{z}$ は複素数体 $\mathbb{C}$ の実数体 $\mathbb{R}$ 上の代数としての自己同型，つまり拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の自己同型である．同じように，任意の 2 次の拡大 L/K は（K の標数 $\neq 2$ ならば）ちょうど 2 つの自己同型を持つ．実際，まず $L = K(\gamma)$，$\gamma^2 = c \in K$ となることは容易にわかる．各自己同型 σ は，$\sigma(a + b\gamma) =$

---

[1] ［訳註］運動量の保存法則はロシア語では，「質量中心の運動の法則」という言い方をする．

$a+b\sigma(\gamma)$ であるから，γ に対する作用によって一意的に決まる．しかし，σ は L の体の演算を保ち，K の元を固定するので，$(\sigma(\gamma))^2 = \sigma(\gamma^2) = \sigma(c) = c$ となる．それゆえ $\sigma(\gamma) = \pm\gamma$ である．こうして，恒等写像 $\sigma(a+b\gamma) = a+b\gamma$ と，$\sigma(\gamma) = -\gamma$ を満たす自己同型，つまり $\sigma(a+b\gamma) = a-b\gamma$ しか存在しない.「より対称性の少ない」拡大も存在する．たとえば，$\mathbb{Q}$ 上の 3 次の拡大 $K = \mathbb{Q}(\gamma)$，$\gamma^3 = 2$ には恒等写像しか自己同型はない．実際，上と同じように，任意の自己同型 σ は元 γ での作用によって定まり，$(\sigma(\gamma))^3 = 2$ となる．$\sigma(\gamma) = \gamma_1 \neq \gamma$ であれば，$(\gamma_1/\gamma)^3 = 1$ なので，$\varepsilon = \gamma_1/\gamma$ は方程式 $\varepsilon^3 - 1 = 0$ を満たす．$\varepsilon \neq 1$ なので，方程式 $\varepsilon^2+\varepsilon+1 = 0$ を満たし，それゆえ $(2\varepsilon+1)^2 = -3$ である．それゆえ K は体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ を含まなければならない．しかし，$K/\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}$ の拡大次数はそれぞれ 3 と 2 で，拡大体の次数がその部分体の拡大次数で割り切れるという事実（§6 式 (3) 参照）に矛盾する．

最後に，**物理法則の対称性**（法則を保つ座標変換という意味だと考えている）は，法則の非常に重要な特性である．それで，力学の法則は 1 つの慣性座標系から別の慣性系に移行しても保存されなければならない.（直線上の運動に対して）対応する座標変換は，ガリレオとニュートンの力学では

$$x' = x - vt, \quad t' = t \tag{3}$$

の形をしており，特殊相対性理論では

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{4}$$

の形をしている．ここで，c は真空中の光の速さである．

変換公式 (3) で与えられる対称群を**ガリレオ–ニュートン群**と言い，(4) で与えられる群を**ローレンツ群**と言う．

物理法則の別のタイプの対称性の例に，いわゆる**パリティの法則**がある．時間の符号，電荷の符号，空間の向きづけを同時に変えても，すべての物理法則は保たれなければならないというものである．ここでは全部で 2 つの対称性からなる群が得られている．

変換群に関する非常に簡単な概念をいくつか思い出しておこう．X の変換

群 G に関する**元 $x \in X$ の軌道**とは，g が G のすべての元を動くときの $g(x)$ の形をした元からなる集合 Gx のことである．**元 x の固定部分群**とは，x を固定する G の元の集合

$$G_x = \{g \mid g(x) = x\}$$

のことである．1 つの元の固定部分群はそれ自身 G に含まれる変換の群である．

2 つの元 $x, y \in X$ の間に

$$g(x) = y \text{ となる変換 } g \in G \text{ が存在する}$$

という関係を考える．これは同値関係である．つまり，反射律と対称律と推移律を満たしている．これを確かめるのは，変換群の定義の 3 つの性質を言い換えるだけのことである．互いに同値な元の全体は 1 つの軌道をなす．それゆえ集合 X は軌道の離散和に分かれる．この軌道の集合を**軌道空間**と言い，$G \backslash X$ と書く．軌道が 1 つしかないとき，つまり，もし任意の $x, y \in X$ に対して $y = g(x)$ となる $g \in G$ が存在するとき，**変換群 G を推移的**と言う．

さて，群の概念に移ろう．これは変換群のある様相だけを定式化するものである．変換を掛けることができ（式 (1)），逆変換が存在し，この積に結合律 $(fg)h = f(gh)$ が成り立つということである（これは定義からすぐに確かめることができる）．

群とは，集合 G であって，2 つの元 $g_1, g_2 \in G$ を元 $g_1g_2 \in G$ に対応させる（積と呼ばれる）演算が定義されていて，次の 3 条件を満たすもののことである．

結合律． $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ ．

単位元の存在． ある元 $e \in G$ が存在して，

$$eg = ge = g \qquad (g \in G)$$

を満たす（e の一意性は容易に証明される）．

逆元の存在． 任意の $g \in G$ に対して

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e$$

となるような元 $g^{-1} \in G$ が存在する（元 g^{-1} の一意性は容易に証明される）．

結合律により，任意個数の元 $g_1, g_2, \ldots, g_n$ に対する積（順序は与えておく）が括弧の位置によらないことが容易に証明され，したがって $g_1 g_2 \cdots g_n$ と書くことができる．g 自身の n 個の積 $g \cdots g$ を g^n と書き，$(g^{-1})^n$ を g^{-n} と書く．

もし積が可換なら，つまり

$$g_1 g_2 = g_2 g_1 \qquad (g_1, g_2 \in G)$$

が成り立てば，G を**可換群**または**アーベル群**と言う．本質的にはすでにこの概念は出てきている．なぜなら，これは整数環 $\mathbb{Z}$ 上の加群の概念と同じものなのである．この関係を強調するために，アーベル群の演算は通常，和と呼ばれ，$g_1 + g_2$ と書かれる．そのとき，e の代わりに 0 と書き，g^{-1} の代わりに $-g$ と書き，g^n の代わりに ng と書く．$n \in \mathbb{N}$, $g \in G$ に対して，ng は $\mathbb{Z}$ 加群としての G を定義する積である．

もし群 G の元が有限個なら，G を**有限群**と言う．元の個数を G の**位数**と言い，$|G|$ と書く．

2 つの群 G_1 と G_2 の同型（写像）とは，

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

を満たす 1 対 1 対応 $f : G_1 \to G_2$ のことである．

2 つの群 G_1 と G_2 の間に何か 1 つ同型写像が存在するとき，2 つの群は**同型**であると言い，$G_1 \cong G_2$ と書く．

有限群 $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ は，**ケイリーの表**とも呼ばれる「乗積表」によって与えることができる．これは，第 i 行第 j 列の成分を元 $g_i g_j$ とする正方行列である．たとえば，G の位数が 2 で，単位元 e と $g \neq e$ からなるとすれば，容易にわかるように，g^2 は e となるしかない．それゆえそのケイリーの表は

	e	g
e	e	g
g	g	e

という形をしている．群 G の位数が 3 で，e を単位元，$g \neq e$ とすれば，容易にわかるように，$g^2 \neq e$ かつ $g^2 \neq g$ であり，したがって，$G = \{e, g, h\}$

で，$h=g^2$ である．同様に，$gh=e$ であることも容易にわかる．したがって，G のケイリーの表は

	e	g	h
e	e	g	h
g	g	h	e
h	h	e	g

という形になる．

2 つの群が同型であることは，(元の表し方を除いて) ケイリーの表が同じであることを意味している．もちろん，ケイリーの表を書き下して便利なのは，位数の大きくない群に対してだけである．これ以外にも群の演算を与える方法がある．たとえば，G を正三角形の対称性の群とする（図 15(c) 参照）．s を 1 つの高さ[2]に関する鏡映とし，t を中心の周りの 120° 回転とする．すると，t^2 は 240° 回転となる．s, st, st^2 が 3 つの高さに関する鏡映であることは容易に確かめられる．こうして群 G のすべての元は

$$e, t, t^2, s, st, st^2 \tag{5}$$

の形に書かれる．明らかに

$$s^2=e, \quad t^3=e \tag{6}$$

である．さらに

$$ts=st^2 \tag{7}$$

も容易に確かめることができる．これらの規則ですでに，群の積は決まってしまう．たとえば

$$(st)^2 = stst = sst^2t = s^2t^3 = e,$$

$$t^2s = tts = tst^2 = st^2t^2 = st$$

となる．このようなとき，**生成元**と**関係式**によって群を与える，という言い方をする.（より詳しくは §14 で述べる.）この書き方をしたとき，群 G が G'

[2] ［訳註］もちろん，高さを与える，頂点から対辺への垂線のことである．

と同型であることは，G' にも元 s', t' があり，それらによって G' の他のすべての元が (5) と同じように表わされ，(6) と (7) の条件を満たすことを意味している．たとえば，体 $\mathbb{F}_2$ の元を成分とする非退化な 2 次行列の作る群 $GL(2,\mathbb{F}_2)$ を考えよう．その元をすべて書き下すことは容易である．なぜなら，その列は必ず

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

の形をしているし,（行列が非退化なことと同値な）列が比例しないということは，この場合，列が異なっていることを意味する．得られるのは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

という 6 つの行列である．$t' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $s' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と置けば，このリストがちょうど (5) の形をしており，関係式 (6) と (7) を満たすことも容易にわかる．このように，この群は正三角形の対称性の群と同型である．これはまったく不思議な同型に思える．しかしながら，もっと内容のある述べ方もできる．このために，正三角形の対称性がその 3 つの頂点を置換し，さらに可能な 6 つの置換すべてを実現していることに注意を向ける必要がある．$\mathbb{F}_2$ 上の非退化な行列も (8) の 3 つの列ベクトルに作用し，これらの可能なすべての置換を実現している．こうして，この 2 つの群のそれぞれが，3 つの元の置換全体の群に同型になる．

この例やまた他の多くの例からもわかるように，全く異なる性格を持つ対象からなり，異なる問題に関連して現れるような群の間にも，同型があり得るのである．同型の概念は，まさにこれらの群の積の規則にだけ注意を向けたもので，その元の具体的な性格を捨象したものなのである．その元がある記号で表わされるだけのもので，それに対して（ケイリーの表のような）積の規則が与えられているようなある**抽象的な群**が存在して，具体的な群はその**実現**であると考えることができる．驚くべきことだが，抽象的な群の性質，つまり群演算だけに関する性質が，しばしばその抽象群によって「座標化」される具体的な実現を理解するために，大変役に立つことがあるのである．そ

の古典的な例が，後に §18A で議論するガロア理論である．多くの群論の応用の際には，抽象的な群の性質は具体的な実現の性質と混ざり合っている．

これまでは変換群の例しか与えなかったので，それが群が自然に現れる唯一の方法であるという印象を読者に与えないようにするため，異なる性質を持つ例をここでいくつか与えておく．位相空間 X のホモトピー群 $\pi_n(X)$，ホモロジー群 $H_n(X)$，コホモロジー群 $H^n(X)$ もこの種の例だが，それについての議論は §20 と §21 ですることにする．

例 1．イデアル類群． §4 で，任意の可換環 A でのイデアルの積を定義した．この積は結合的で，単位元（環 A）を持つが，イデアルの逆元はほとんど常に（$\mathbb{Z}$ においてさえ）存在しない．A 加群（§5 参照）として同型なすべての 0 でないイデアルを 1 つのクラス（類）にまとめる．積の演算はクラスに移すことができ，多くの環 A では，これでもう群になる．このことは単に，各イデアル $I \neq (0)$ に対して，IJ が主イデアルになるようなイデアル J が存在することを意味する．この群を環 A の**イデアル類群**と言い，$\mathrm{Cl}(A)$ と書く．このことは，たとえば有限拡大 $K/\mathbb{Q}$ の代数的整数環（§7 参照）の場合に起こる．ここでは $\mathrm{Cl}(A)$ は有限群である．$a+b\sqrt{-5}$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ の形の数の環 A（§3 例 12 参照）に対しては，$\mathrm{Cl}(A)$ の位数は 2 である．これは，主イデアルでないすべてのイデアルは同値（つまり，A 加群として同型）で，任意の 2 つのこのようなイデアルの積は主イデアルになるという意味である．

例 2．拡大の群 $\mathrm{Ext}_R(A,B)$． A と B を環 R 上の加群とする．加群 C が A の B による**拡大**であるとは，C が B と同型な部分加群 B_1 を含み，C/B_1 が A と同型のときに言う．この際，拡大の概念の中に，2 つの同型 $u: B \cong B_1$ と $v: C/B_1 \cong A$ も含めている．**自明な拡大**とは $C = A \oplus B$ のことである．群 $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ は群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ による自明でない拡大である．まったく同じように，ある基底で，固有値 λ の 2 次のジョルダン・ブロック，つまり，$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ という行列になるような線形変換は，環 $K[x]$ 上の加群 C を定義する（§5 例 3 参照）．この C は，1×1 行列 λ に対応する加群 A の A 自身による拡大である．

A の B による 2 つの拡大 C と C' が**同値**であるとは，同型 $\varphi: C \cong C'$

が存在し，これが $B_1 \subset C$ を $B_1' \subset C'$ に写し，同型 $B_1 \cong B \cong B_1'$ と $C/B_1 \cong A \cong C'/B_1'$ に同調するときに言う[3]．同値を除いて考えた，A の B によるすべての拡大の集合は $\mathrm{Ext}_R(A,B)$ と書かれる．半単純環 R に対しては自明な拡大だけしかなく，一般の場合には，半単純性を特徴付けるこの状況からの離れ具合を測るものになっている．

集合 $\mathrm{Ext}_R(A,B)$ を群にしよう．$C, C' \in \mathrm{Ext}_R(A,B)$ とし，$f: B \cong B_1 \subset C$ と $g: C/B_1 \cong A$ を C の定義の中の同型とし，f', g' を C' に対する同じものとする．$g(c) = g'(c')$ を満たす対 (c, c') の作る部分加群 $D \subset C \oplus C'$ と，$b \in B$ に対する対 $(f(b), -f'(b))$ の作る部分加群 $E \subset C \oplus C'$ を考え，$C'' = D/E$ と置く．$f''(b) = (f(b), 0) + E = (0, f'(b)) + E$ で与えられる準同型 f'' は B とある部分加群 $B_1'' \subset C''$ との同型を定め，$(c, c') \in D$ に対して $g''(c, c') = g(c) = g'(c')$ とおけば，g'' は D から A の上への準同型で，E 上で 0 になる．つまり，準同型 $g'': C'' \to A$ が得られ，これが C''/B_1'' から A への同型を定めることは容易に確かめられる．こうして C'' は A の B による拡大である．対応する元 $C'' \in \mathrm{Ext}_R(A,B)$ を，拡大 C と C' の和と言う．すべての群の公理を確かめるのは難しくない．零元は自明な拡大である．

例 3．ブラウワー群． 体 K が与えられたとき，K 上の有限ランクの中心的多元体（§11 参照）の集合に群法則を定義しよう．R_1 と R_2 を K 上の有限ランクの単純な中心的代数とする．加群 $R_1 \otimes_K R_2$ に，その生成元に対して

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = (a_1 b_1 \otimes a_2 b_2)$$

と置くことによって，積を定義すると，$R_1 \otimes_K R_2$ は K 上の代数となり，これもまた単純かつ中心的であることを証明するのは難しくない．たとえば，

---

3 ［訳註］この「同調する」とは非常に訳しにくい言葉である．状況に応じて，「調和する」「一致する」「矛盾しない」「両立する」などと訳されている．並行した対称群それぞれに構造があり，対応がその構造を保つことを意味している．問題はその構造が必ずしも同種のものでなくてもよかったり，複雑に絡み合ったりしていて，一々述べるのがひどく面倒な場合に使われる「便利」な言葉である．場合に合った訳語が見つからない場合はとても困ることになる．この場合は，標準準同型を $\pi: C \to C/B_1$，包含写像を $\iota: B \to B_1 \subset C$ と書くことにし，対応する写像をすべて $'$ をつけて表わすことにすれば，$\varphi\iota' = \iota$，$v'\pi'\varphi = v\pi$ を満たすことを意味している．§21 で導入する完全系列によって拡大を定義する方がわかり易いかも知れない．

$$M_{n_1}(K) \otimes M_{n_2}(K) \cong M_{n_1 n_2}(K)$$

である．D_1 と D_2 が K 上の有限ランクの中心的多元体であれば，上のこととウェダーバーンの定理（§10 定理 IV）とから，ある中心的多元体 D に対して $D_1 \otimes_K D_2 \cong M_n(D)$ となる．この D を多元体 D_1 と D_2 の積と言う．こうして群が定義されることを示すことができる（多元体 D の逆元は歪同型な反対多元体 D' である）．この群を体 K のブラウワー群と言い，$\mathrm{Br}(K)$ と書く．§11 で与えられた $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{Q}$ 上の多元体の記述（定理 V と VIII）が，これらの体のブラウワー群の群演算を与えることを示すことができる．それには，そこに現れる 1 のベキ根を，1 のベキ根の作る群の元と考えるだけでよい．たとえば，群 $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p)$ はすべての 1 のベキ根の作る群と同型であり，群 $\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$ は §11 定理 VIII の条件を満たす 1 のベキ根の組

$$(\mu_{\mathbb{R}}, \mu_p, \ldots)$$

全体の群と同型である．群 $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ の位数は 2 である．

以下の節 (§13–§15) では，一番よく出てくるタイプの群や非常に役に立つ具体的な群の例を概説する．それは，群の一般概念と数学の他の分野との（さらに数学以外とも）関わり方の概説になっている（もちろん条件つきだが）．だがまず，群の定義自身に密着したいくつかの簡単な概念や性質を扱う必要がある．それがないと，例を考えることも難しいことになる．

群 G の**部分群**と呼ばれるのは，G の部分集合であって，その任意の元の逆元も元とし，任意の 2 元の積も元とするようなもののことである．部分群の例には，変換群における 1 点の固定部分群がある．$\{g_\alpha\}$ を G の元の任意の集合とする．g_α やその逆元の（任意の順序での）積の全体は，容易にわかるように，G の部分群になる．これを，元 $\{g_\alpha\}$ によって**生成された部分群**であると言う．この群が G に一致するとき，g_α を G の**生成元**と言い，$G = \langle \{g_\alpha\} \rangle$ と書く．たとえば，1 は（加法）群 $\mathbb{Z}$ の生成元である．正三角形の対称性の群では，s と t が生成元であり（(5) 参照），このとき $G = \langle s, t \rangle$ となる．

群 G から群 G' への**準同型**とは，

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

を満たす写像 $f: G \to G'$ のことである．

群 G から集合 X の変換群への準同型を，G の X 上の**作用**と言う．作用を与えるためには，任意の元 $g \in G$ に対応する X の変換 $f(g)$，つまり任意の $x \in X$ に対する $f(g)(x)$ を定める必要がある．$f(g)(x)$ を短く gx と書くことにすると，G の X 上の作用を与えることは，任意の $g \in G$ と $x \in X$ に対して元 $gx \in X$ を与え，つまり，写像

$$G \times X \to X, \qquad (g, x) \to gx$$

を与え，その際（写像 f が準同型であることと同値な）

$$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

という条件を満たすようにすることと同じである．

同じ 1 つの群 G の 2 つの異なる集合 X と X' の上の 2 つの作用が**同型**であるとは，X と X' の元の間に 1 対 1 対応 $x \leftrightarrow x'$ があり，任意の $g \in G$ に対して，$x \leftrightarrow x'$ から $gx \leftrightarrow gx'$ が得られるときに言う．

例 4. 行列式が 1 の 2 次の実行列のなす群 G を考えよう．そのような行列 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ は複素上半平面 $\mathbb{C}^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ に

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

という規則で作用している．明らかに，これは G の $\mathbb{C}^+$ 上の作用になっている．一方，2 次の正定値対称行列のなす集合 S の上にも G が作用するが，この作用は $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ が行列 s を gsg^* に写すものである．ここで，g^* は g の転置行列である[4]．$s = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ と書けば，S は $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ という条件で特徴付けられ，斉次座標 $(a : b : c)$ を持つ射影平面では，方程式 $ac = b^2$ を持つ 2 次曲線の内部 $\mathfrak{P}$ を定めている．もちろん，G は，この曲線を自分自身に写すような射影変換によって，$\mathfrak{P}$ に作用している．正定値

[4] ［訳註］転置行列に対しては，g^* よりも ${}^t g$ を使うことが多い．これは見た目を重視する立場だが，本書では双対空間との関係を重視して $*$ を使っている．

の 2 次形式 $ax^2+2bxy+cy^2$ は $c(xz+y)(x\bar{z}+y)$, $z \in \mathbb{C}^+$ の形に書くことができる[5]．行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ にこの z を対応させることにより，集合 $\mathbb{C}^+$ と $\mathfrak{P}$ との 1 対 1 対応が，G の 2 つの作用の同型を定めることは，容易にわかる[6]．よく知られているように，$\mathbb{C}^+$ と $\mathfrak{P}$ はロバチェフスキー平面幾何の 2 つのモデル，**ポアンカレ・モデル**と**ケイリー–クライン・モデル**を定めている．どちらのモデルでも，G はロバチェフスキー平面の正格な（向きづけを保つ）運動の群を定めている．

群のそれ自身の上の作用の 3 つの非常に重要な例は

$$g \cdot x = gx,$$

$$g \cdot x = xg^{-1},$$

$$g \cdot x = gxg^{-1}$$

である（左辺は作用を表わし，右辺は G の中の積を表わしている）．これらはそれぞれ，**左正則作用**，**右正則作用**，**随伴作用**と呼ばれる．左正則作用と右正則作用は同型で，その間の同型は群 G から自分自身への写像 $x \mapsto x^{-1}$ で与えられる．

群 G の集合 X の上の作用はもちろん，任意の部分群 $H \subset G$ の作用を定める．特に，左正則作用は，任意の部分群 $H \subset G$ の群 G 全体の上の作用を定める．このようにして得られる変換群の軌道は，H による G の**左剰余類**と呼ばれる．こうして左剰余類は，$g \in G$ をある固定した元とし，h は H のあらゆる元を動くとしたときの，hg の形のすべての元からなる．これを Hg と書く．軌道に関して上で述べたことから，任意の元 $g_1 \in Hg$ は同じ剰余類を定め，群全体は剰余類の離散和に分解される．同じように，部分群 $H \subset G$ の右正則作用は，gH という形の**右剰余類**を定める．随伴表現の

[5] ［訳註］$z+\bar{z}=2b/c$, $z\bar{z}=a/c$ を満たす対応による．

[6] ［訳註］上により $\psi: S \to \mathbb{C}^+$ を定義すると，$\psi(s)=z=(b+i\sqrt{ac-b^2})/c$ となる．これに g に対応する 1 次分数変換を施すと

$$g \cdot \psi(s) = g \cdot z = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = \frac{\alpha\gamma a+(\alpha\delta+\beta\gamma)b+\beta\delta c+i\sqrt{ac-b^2}}{\gamma^2 a+2\gamma\delta b+\delta^2 c}$$

となる．これが $\psi(g \cdot s)=\psi(gsg^*)$ に一致することは，直接計算で確かめられる．

軌道は元の**共役類**と呼ばれ，1つの軌道に属する元どうしは互いに**共役**であると言われる．元 g_1 と g_2 は，ある $g \in G$ に対して $g_2 = gg_1g^{-1}$ であるとき，共役である．$H \subset G$ が部分群であれば，$g \in G$ を固定すると，すべての元 ghg^{-1} $(h \in H)$ がある部分群を作ることは容易にわかる．この群を H に**共役**であると言い，gHg^{-1} と書く．たとえば，G が集合 X の変換群で，さらに $g \in G$, $x \in X$, $y = gx$ であれば，x と y の固定部分群 G_x と G_y は共役で，$G_y = gG_xg^{-1}$ となる．部分群 $H \subset G$ の左剰余類の数を（有限または無限だが），H の**指数**と言い，$[G : H]$ と書く．G が有限群なら，H の各左剰余類に属する元の数は位数 $|H|$ に等しく，それゆえ

$$|G| = |H| \cdot [G : H] \tag{9}$$

となる．特に，$|H|$ は $|G|$ の約数である．

群 G の集合 X 上の作用が推移的であるとする．すると，任意の $x, y \in X$ に対して，$g(x) = y$ となるような $g \in G$ が存在し，そのような元の全体は，x の固定部分群 G_x の右剰余類 gG_x をなす．このようにして，X の元と，G における G_x の剰余類との間の1対1対応が得られる．X が有限集合であれば，X の元の個数を $|X|$ と書くと，

$$|X| = [G : G_x]$$

となることがわかる．群 G の作用が推移的でないならば，X_α をその軌道とすると，$X = \bigcup X_\alpha$ である．各軌道 X_α から代表元 x_α を選ぶと，それらの元と G における G_{x_α} の剰余類との間の1対1対応が得られる．特に，もし X が有限集合であれば，

$$|X| = \sum [G : G_\alpha] \tag{10}$$

が成り立つ．ここで，G_α は各軌道の中から選んだ代表元の固定部分群である．

準同型 $f : G \to G'$ の**像** $\operatorname{Im} f$ は，$f(g)$, $g \in G$ の形の元全体のことで，G' の部分群である．

準同型 f の**核** $\operatorname{Ker} f$ は，$f(g) = e$ であるような元 $g \in G$ の全体である．核ももちろん部分群であるが，さらに

$$h \in \operatorname{Ker} f \text{ かつ } g \in G \quad \Longrightarrow \quad g^{-1}hg \in \operatorname{Ker} f \tag{11}$$

という条件も満たす．このことの証明はすぐにわかる．条件 (11) を満たす部分群 $N \subset G$ を**正規部分群**と言う[7]．言い換えれば，正規部分群は随伴作用で不変であること，つまり

$$g^{-1}Ng = N$$

を満たさねばならない．N が G の正規部分群であることを $N \triangleleft G$ と書く．正規部分群の定義は，N の任意の左剰余類が右剰余類でもあること（つまり，$gN = Ng$）と同値である．こうして，正規部分群 N の群 G 上の左正則作用と右正則作用は一般には同じではないが，軌道は同じものになる．

群 G の正規部分群 N による剰余類への分解は，積の演算と矛盾しない．つまり，g_1 と g_2 を同じ剰余類の他の元と取り換えても，g_1g_2 は同じ剰余類に属すことになる．これは正規部分群の定義の同値な言い換えである．このことから，剰余類の上に積を移し変えることができ，それによって，**正規部分群 N による商群**と呼ばれる群ができる．これを G/N と書き，元 $g \in G$ を剰余類 gN に対応させる準同型 $G \to G/N$ が，**標準準同型**と呼ばれるものになる．

準同型定理．準同型の像は，その核による商群と同型である．

任意の準同型 f は標準準同型に帰着することができる．つまり，$G/\mathrm{Ker}\, f$ から $\mathrm{Im}\, f$ への同型が存在して，これを標準準同型 $G \to G/\mathrm{Ker}\, f$ に合成すれば f になる．

例 5. ユークリッド平面 E のすべての運動，つまり，点の間の距離を保つ変換全体の作る群 G を考える．この作用は，E のすべての（自由）ベクトルの作るベクトル空間 L に拡張することができる．$x, y \in E$ とし，$\overrightarrow{xy}$ で x を始点とし y を終点とするベクトルを表わせば，$\tilde{g}(\overrightarrow{xy})$ はベクトル $\overrightarrow{g(x)g(y)}$ と定義される．もし $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x_1y_1}$ であれば（つまり，線分 xy と x_1y_1 の長さが等しく平行の位置にあれば），$\overrightarrow{g(x)g(y)} = \overrightarrow{g(x_1)g(y_1)}$ となるので，変換 $\tilde{g}$ の定義のあいまいさはなくなる．空間 L において，$\tilde{g}$ は直交変換である．

[7] ［英訳註］ドイツ語の Normalteiler に由来するロシア語の用語の直訳は，積の因子の考え方（§16 参照）を含む normal divisor（正規因子）となるだろう．

写像 $g \mapsto \tilde{g}$ は運動の群から直交変換の群への準同型である．この準同型の像は直交変換全体の群と一致する．その核はベクトル $u \in L$ に関する空間 E の平行移動である．こうして，平行移動群は正規部分群になる．このことはまた直接に証明することもできる．実際，T_u をベクトル u の平行移動とすると，容易にわかるように，$gT_ug^{-1} = T_{g(u)}$ である．直交変換の群が，平行移動の作る正規部分群による運動群の商群と同型であることがわかった．今の場合は，これもある点 $O \in E$ を選ぶことによって，直接に示すことは易しい．このとき，任意の運動は $g = T_u \circ g'$, $g' \in G_O$（点 O の固定部分群）の形に書くことができる．明らかに，G_O は直交変換の群と同型で，T_ug' の剰余類を g' に写すことがこの準同型を与えている．

g を G の元とする．写像 $\varphi_g : \mathbb{Z} \to G$, $\varphi_g(n) = g^n$ は明らかに準同型で，その像は g のすべてのベキからなる．これを g によって生成される**巡回部分群**と言い，$\langle g \rangle$ と書く．もし $G = \langle g \rangle$ となるような元 g が存在すれば（つまり，G のすべての元が g のベキであれば），G を**巡回群**と言い，g をその**生成元**と言う．巡回群の例として，整数の作る加法群 $\mathbb{Z}$ があり，1 を生成元に持つ．$\mathbb{Z}$ のあらゆる部分群は，0 だけからなるか，それに含まれる最小の正数 k の倍数の全体である $k\mathbb{Z}$ のどちらかで，これもまた巡回群である．準同型 $\varphi_g : \mathbb{Z} \to G$ にもどると，$\operatorname{Ker} \varphi_g = 0$ であるか（これは g のすべてのベキ g^n がすべて異なることを意味する），$\operatorname{Ker} \varphi_g = k\mathbb{Z}$ であるか（これは $g^k = e$ であり，$\langle g \rangle$ は位数 k の巡回群 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ に同型であることを意味する）であると言うことができる．前者の場合には元 g を**無限位数**であると言い，後の場合には**位数** k であると言う．G が有限群であれば，(9) により，k は $|G|$ の約数になる．

ここで，群を構成する方法のうちで最も簡単なものを述べておく．G_1 と G_2 を 2 つの群とする．対 (g_1, g_2), $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ 全体の集合を考える．対に対して元ごとの演算，つまり，

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1g_1', g_2g_2')$$

を考えると，これで群が得られることは容易にわかる．これを群 G_1 と G_2 の**直積**と言い，$G_1 \times G_2$ と書く．e_1 と e_2 が群 G_1 と G_2 の単位元であれば，

写像 $g_1 \mapsto (g_1, e_2)$ と $g_2 \mapsto (e_1, g_2)$ は群 G_1 と G_2 から群 $G_1 \times G_2$ の部分群への同型になる．普通は，群 G_1 と G_2 の元をこれらの同型での像と同一視する．つまり，(g_1, e_2) を g_1 と書き，(e_1, g_2) を g_2 と書く．こうして，G_1 と G_2 は $G_1 \times G_2$ の部分群になる．$g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ ならば，この群の中では $g_1 g_2 = g_2 g_1$ であり，このことから G_1 と G_2 が $G_1 \times G_2$ の正規部分群であることがわかる．$G_1 \times G_2$ の任意の元は一意的に $g_1 g_2$ $(g_1 \in G_1, g_2 \in G_2)$ の形に書かれる．G_1 と G_2 がアーベル群（で，演算を和で書く）なら，§5 例 5 に出てきた $\mathbb{Z}$ 加群の直和の演算になっている．

§ 13.　群の例：有限群

群の一般概念が任意の集合の変換に関係するのと同じように，有限群は有限集合の変換群と関係している（この場合，変換は置換とも呼ばれる）．

例 1. n 個の元 $x_1, \dots, x_n$ からなる有限集合 X の変換全体の作る群を，$x_1, \dots, x_n$ に関する対称群と言い，$\mathfrak{S}_n$ と書く．x_1 の固定部分群 $(\mathfrak{S}_n)_{x_1}$ は明らかに $\mathfrak{S}_{n-1}$ と同型である．各剰余類 $g(\mathfrak{S}_n)_{x_1}$ は x_1 をある与えられた元 x_i に移すすべての置換からなる[1]．それゆえ，剰余類の数は n に等しい．したがって，$|\mathfrak{S}_n| = n|\mathfrak{S}_{n-1}|$ となり，帰納法によって，$|\mathfrak{S}_n| = n!$ となる．

σ_i $(i = 1, \dots, n-1)$ を，x_i と x_{i+1} を交換し，残りの元を動かさない変換とする．明らかに

$$\sigma_i^2 = e \tag{1}$$

となる．$x_1, \dots, x_n$ の任意の置換は隣り合う元を次々と交換することによって実現することができるので，任意の元 $g \in \mathfrak{S}_n$ は $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ の積である．言い換えれば $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ は $\mathfrak{S}_n$ の生成元である．明らかに，

$$|i-j| > 1 \text{ のとき} \qquad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \tag{2}$$

である．この場合，σ_i と σ_j は別々の元の対を交換している．積 $\sigma_i\sigma_{i+1}$ は 3 つの元 x_i, x_{i+1}, x_{i+2} を巡回的に置換するので，

$$(\sigma_i\sigma_{i+1})^3 = e \qquad (1 \leq i \leq n-2) \tag{3}$$

となる．

事実． 群 $\mathfrak{S}_n$ の積の規則は，生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ の間の関係式 **(1), (2),**

---

[1] ［訳註］つまり，$g(x_1) = x_i$ のとき，$g(\mathfrak{S}_n)_{x_1} = \{h \in G \mid x_i = h(x_1)\}$ となる．

(3) によって完全に決定される，ことを示すことができる．

この主張のより厳密な意味は §14 で明らかにされる．

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を任意の置換とし，$H = \langle \sigma \rangle$ を σ で生成される巡回部分群とする．H の作用に関して X は k 個の軌道 $X_1, \ldots, X_k$ に分かれ，それらの元の個数を $n_1, \ldots, n_k$ と書く．明らかに

$$n = n_1 + \cdots + n_k \tag{4}$$

となる．群 $H = \langle \sigma \rangle$ は，それぞれの軌道 X_i の中では元を巡回的に置換している．分解 $X = \bigcup X_i$ とそれぞれの X_i における元の巡回置換を指定すれば（たとえば，$X_i = \{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n_i}}\}$ で，$\sigma x_{\alpha_j} = x_{\alpha_{j+1}}$ $(j \leq n_i - 1)$，$\sigma x_{\alpha_{n_i}} = x_{\alpha_1}$ と書くと），置換 σ は一意的に決まる．このデータを，σ のサイクルへの分解と言い，数 $n_1, \ldots, n_k$ を**置換の巡回型**と言う．

$\sigma' = g\sigma g^{-1}$ が共役な元であれば，そのサイクル分解は $X = \bigcup gX_i$ の形をしている．ここで，$gX_i = \{gx_{\alpha_1}, \ldots, gx_{\alpha_{n_i}}\}$ であり，それゆえ数 $n_1, \ldots, n_k$ は変わらない．逆に，σ' が同じ巡回型 $n_1, \ldots, n_k$ を持つ任意の置換とすれば，$\sigma' = g^{-1}\sigma g$ となるような置換 g が容易に構成される．こうして 2 つの置換が共役であることと，同じ巡回型を持つこととは同値である．言い換えれば，$\mathfrak{S}_n$ の元の共役類は，条件 (4) を満たす自然数の組 $n_1, \ldots, n_k$ と 1 対 1 に対応する．特に，$\mathfrak{S}_n$ の元の共役類の数は，正の整数の和としての n の分割の数に等しい．

例 2. 今度は，置き換えられる元 $x_1, \ldots, x_n$ を，環 $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ の独立変数として，多項式

$$\Delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

を考えよう．明らかに，置換 σ を施すと，多項式 Δ は変わらないままか，符号が変わるかである．つまり，

$$\Delta(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = \varepsilon(\sigma)\Delta(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\varepsilon(\sigma) = \pm 1)$$

となり，$\sigma \to \varepsilon(\sigma)$ は $\mathfrak{S}_n$ から位数 2 の群 $\{\pm 1\}$ への準同型である．この群の核を**交代群**と言い，$\mathfrak{A}_n$ と書く．置換 σ は $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ のとき**偶置換**と言

い，$\sigma \notin \mathfrak{A}_n$ のとき奇置換と言う．明らかに，$\mathfrak{A}_n$ の $\mathfrak{S}_n$ における指数は $[\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n] = 2$ であり，したがって $|\mathfrak{A}_n| = n!/2$ である．

多くの問題で $\mathfrak{S}_n$ と $\mathfrak{A}_n$ の正規部分群を数え尽くすことは重要で，その答は次の通りである．

定理 I. $n \neq 4$ のとき，群 $\mathfrak{S}_n$ は $\{e\}$, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{S}_n$ 以外の正規部分群を持たず，$\mathfrak{A}_n$ は $\{e\}$, $\mathfrak{A}_n$ 以外の正規部分群を持たない．$n = 4$ のときは，さらに（$\mathfrak{S}_n$ と $\mathfrak{A}_n$ の双方に），e と巡回型が $(2,2)$ のすべての置換からなる，位数 **4** の正規部分群が存在する．

有限群の重要な例が現れる別の道筋は，ある有名な群の有限部分群の研究である．ユークリッド空間の直交変換群の有限部分群という，古典的な例を扱うことにしよう．

幾何的また物理的観点から最も興味ある群は，3 次元空間に働く群である．しかし，簡単なモデルを得るために，最初は平面に対して類似の結果を扱おう．向きづけを保つ直交変換は回転と呼ばれ，これらもまた群をなす．

例 3. 平面回転群の有限部分群.

定理 II. 平面の回転の有限群は巡回群である．このような群で位数 n のものは，ある固定点の周りの角 $\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ のすべての回転からなっている．

この群を C_n と書く．これは向きづけられた正 n 角形の対称性全体の群として特徴付けることができる（図 18 は $n = 7$ の場合の図である）．

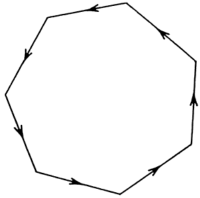


図 **18**

定理 III. 鏡映を含む平面の直交変換の群の有限部分群は，ある正 n 角形の対称性全体の群である．この群を D_n と書く．その位数は $2n$ で，C_n に属する変換と正 n 角形の n 本の対称軸に関する n 個の鏡映からなる．

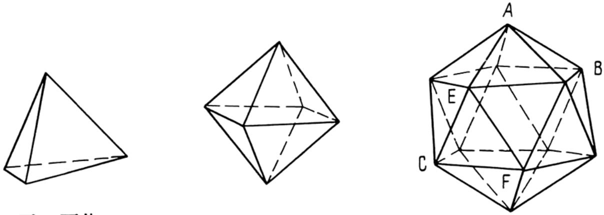
$n = 1, 2$ の場合はいくぶん例外的である．D_1 は **1** つの鏡映から生成される位数 **2** の群であり，D_2 は x 軸と y 軸に関する鏡映から生成される位数 **4** の群である．

例 4. **3** 次元空間の有限回転群の古典的な例は正多面体と関係していている．正多面体 M にはそれぞれ，M を保つすべての回転からなる群 G_M が対応している.「正多面体」であることは，多くの対称性が存在することに反映している．M を n 次元空間の有界で凸な n 次元多面体であるとする．集合 $F = \{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}\}$ を M の旗と呼ぶ．ただし，M_i は M の i 次元の面で，$M_i \subset M_{i+1}$ を満たしているとする[2]．M の旗全体の集合上に，M の対称群 G_M が推移的に作用するとき，M を**正多面体**であると言う．特に，$n = 3$ のとき，群 G_M が，頂点とそれを端点とする辺のなす対の集合上に推移的に作用していなければならない．容易にわかることだが，そのような対の固定部分群が恒等変換だけからなり，そのため G_M の位数は，正多面体の頂点の数と 1 つの頂点から出ている辺の数との積に等しい．すべての正多面体は古代においても知られていた（**プラトンの立体**と呼ばれることがある）．それは，**正 4 面体**，**立方体**，**正 8 面体**，**正 12 面体**，**正 20 面体**である．各正多面体には，もとの多面体の面の中心を頂点とするような双対多面体が結びついている．明らかに双方の多面体の群 G_M は同じである．正 4 面体は自己双対的であり，立方体は正 8 面体と，正 12 面体は正 20 面体と双対である．こうして**正多面体群**は 3 つだけ，つまり，**正 4 面体群**，**正 8 面体群**，**正 20 面体群**が得られる（図 19 参照）．対応する群をそれぞれ T, O, Y と書くと，その位数は

$$|T| = 12, \quad |O| = 24, \quad |Y| = 60$$

である．これらの群以外にも，回転群の有限部分群のわかりやすい例がある．与えられた軸 ℓ の周りの角 $\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ の回転からなる位数

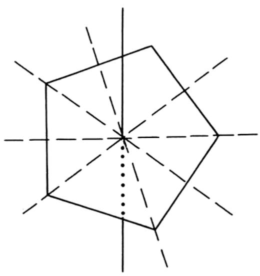
[2] ［訳註］もちろん $M_n = M$ としている．



正 4 面体　　正 8 面体　　正 20 面体

図 19

n の巡回群 C_n と，位数 $2n$ の正 **2** 面体群 D_n である．D_n は C_n を含み，さらに ℓ に直交する平面の中にある n 本の軸の周りの角 π の回転を n 個含んでいる．ただし，これらの軸は ℓ と交わり，互いには $\dfrac{2\pi}{n}$ の整数倍で交わっている．群 D_n は，正多面体が退化して，平面の n 角形になったものの回転の群と考えることができる（図 20 参照）．この形のものはすでに例 3 で扱っている．



群 D_5 の中の角 π の回転の軸

図 20

定理 IV． 巡回群，正 **2** 面体群，正 **4** 面体群，正 **8** 面体群，正 **12** 面体群は，**3** 次元空間の回転群の有限部分群のすべてを尽くしている[3]．

[3] ［訳註］定理の証明，正多面体の存在や対称群の構造は，トス [126] 第 17 節に詳しい．またこの本はこの問題に関する歴史的な記述や図も多く，一読の価値がある．

この主張は厳密には，そのような群 G が巡回群であるか，または $G = G_M$ であるような正多面体 M が存在するということを意味している．ある1つのタイプの正多面体は，すべて回転と一様な拡大縮小によって互いに得ることができるので，対応する群が回転群の部分群に共役であることがわかる[4]．

正4面体の回転の群は頂点の集合に作用するが，これが実現するのは偶置換だけである．このことは，正4面体の体積 V を

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

と書けば明らかである．ここで，(x_i, y_i, z_i) は4つの頂点の座標である．このことから，正4面体群 T は交代群 $\mathfrak{A}_4$ と同型であることがわかる．代数的には，群 T の頂点の集合上の作用は，位数3の部分群の集合上の共役による作用に対応している（位数3の部分群は，それぞれ1つの頂点とその対面の中心を結ぶ軸の周りの回転からなる[5]）．

まったく同じように，正8面体群 O の位数3の部分群は，正8面体の対面の中心を結ぶ軸に対応している．そのような軸は4本（つまり，そのような部分群は4つ）あり，それらの上の群 O の作用によって，同型 $O \cong \mathfrak{S}_4$ が定まる．

正20面体群 Y では，まず位数2の元を考える．これは，対辺の中点を結ぶ軸の周りの $180°$ 回転によって与えられる．辺の数が30あるのでそのような軸の数は15であり，それゆえ位数2の元の数は15である．位数2の軸のそれぞれに対し，それに直交する同様な軸がある（たとえば，図19の AB と CD の各中点を結ぶ軸と，この軸を，三角形 CFE の中心を通る位数3の軸に関して回転させて得られるもう2つの軸を考えるとよい）．これらの軸の定める位数2の3つの元と単位元が，$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ に同型な位数4のアーベル群を作る．したがって，正20面体群 Y にはこのような部分群が5つある．

---

4 ［訳註］運動群の中で共役になるということで，正多面体の中心（すべての頂点の重心）を原点に移す変換も考える必要がある．

5 ［訳註］したがって，この集合は頂点に対応する4元からなり，その置換が共役によって得られるということである．

群 Y の，共役によるこれら 5 つの部分群の上の作用（または互いに直交する位数 2 の軸の 3 つ組が 5 つあり，その組の集合上の作用）が，同型 $Y \cong \mathfrak{A}_5$ を定めている．

これらの群の間のある重要な関係が，しばしば一定の役割を果たすことがある．$O \cong \mathfrak{S}_4$ と $T \cong \mathfrak{A}_4$ の同型と，定理 I とから，群 O には T に同型な位数 2 の正規部分群がただ 1 つあることがわかる．正 4 面体の各頂点の立体角を，各辺を 2 等分するように平面で切り分けることによって，この包含関係を目で見ることができる（図 21 参照）．切った残りは正 8 面体である．正 4 面体のすべての対称性は群 T をなし，内接する正 8 面体を保ち，それゆえ O に含まれる．

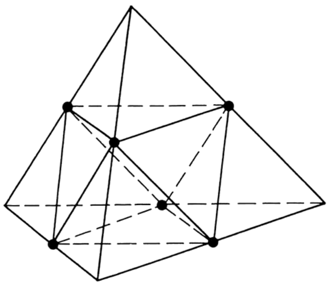


図 21

正多面体群は自然界では分子の対称群として現れる．たとえば（図 22 参照），分子 $H_3C–CCl_3$ の対称群は C_3 であり，エタン分子 C_2H_6 では D_3，メタン分子 CH_4 では正 4 面体群 T（炭素原子 C は正 4 面体の中心にあり，水素原子 H は頂点にある），6弗(フッ)化ウラニウム UF_6 では正 8 面体群 O である（ウラン原子 U は正 8 面体の中心にあり，弗素原子 F は頂点にある）．

すべての直交変換の作る群の有限部分群の分類は，定理 IV から容易に得られる．すべての直交変換の作る群 Γ' は直積 $\Gamma \times \{e, e'\}$ である．ここで，Γ は 3 次元空間の回転群で，$Z = \{e, e'\}$ は恒等変換と点対称変換 e' ($e'(x) = -x$) とからなる位数 2 の群である．Γ と H のすべての部分群がわかっていれば，直積 $\Gamma \times H$ の部分群を調べることはさほど複雑な代数的問題ではない．

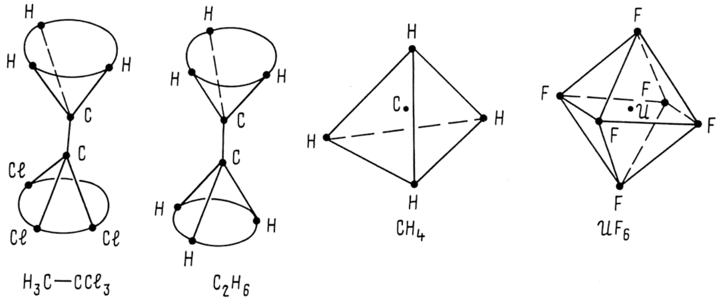


図 22

$H = Z$ が位数 2 の群であるというこの簡単な場合では，答は次の通りである．部分群 $G \subset \Gamma \times Z$ はすっかり Γ に含まれるか，$G_0 \times Z$ ($G_0 \subset \Gamma$) の形をしているか，部分群 $\bar{G} \subset \Gamma$ から次のようにして得られるかのどれかになる．$\bar{G}$ の指数 2 の部分群 $G_0 \subset \bar{G}$ を選び，$\bar{G} = G_0 \cup V$ を G_0 による剰余類への分解とする．元 $g_0 \in G_0$ と $e'v$ ($v \in V$) の集合は，容易に確かめられるように，群になり，この群を G とするのである．たとえば，2 次元の場合なら，群 D_n は，$\bar{G} = C_{2n}$ と $G_0 = C_n$ とからこのようにして得られる．最後の型の群の構成には，回転群 $\bar{G}$ とその指数 2 の部分群[6] G_0 を数え尽くす必要がある．対応する直交変換の群 G は $\bar{G}G_0$ と書かれる．こうして次の結果が得られる．

定理 V．3 次元空間の直交変換の作る有限群で，回転の群でないものは

$$C_n \times Z,\ D_n \times Z,\ T \times Z,\ O \times Z,\ Y \times Z,\ C_{2n}C_n,\ D_{2n}D_n,\ D_nC_n,\ OT$$

である．最後の群は包含関係 $T \subset O$（図 21 参照）から得られるものである．

どんな有限群 $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ に対しても，G 不変な $\mathbb{R}^n$ 上の正定値 2 次形式 f が存在することを思い起こそう（§10 例 4 参照）．ある非退化な線形変換 φ によって 2 次形式 f は平方の和の形にすることができるという事実から，容易に確かめられるように，$\varphi^{-1}G\varphi$ は直交変換からなる群になる．そ

[6] ［訳註］指数 2 の部分群 $G_0 \subset G$ は，常に G の正規部分群であることが容易に示される．

れゆえ，定理 II から定理 V は $GL(2,\mathbb{R})$ と $GL(3,\mathbb{R})$ の有限部分群の分類も与えていることになる．

例 5. 3 次元空間のあらゆる有限回転群は原点を中心とする球面 S を保つので，球面幾何の運動の群と解釈することもできる．球面を複素変数 z のリーマン球面と同一視すれば，1 次分数変換

$$z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C},\ \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0) \tag{5}$$

は球面 S の共形変換として実現される．S の運動は共形変換の一部をなし，それゆえ今構成した球面の運動のなす有限群は 1 次分数変換群の有限部分群を与えている．こうして，次の定理が得られる．

定理 VI. 1 次分数変換 (5) の群のすべての有限部分群は，このようにして得られる．さらに，同じタイプの正多面体に対応する部分群は，1 次分数変換群の中で共役であることを示すことができる．

この結果の 1 つの応用を述べる．

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0$$

を，有理関数 $p(z), q(z)$ を係数とする微分方程式とし，w_1, w_2 を 2 つの 1 次独立な解とする．関数 $v = w_2/w_1$ は複素変数 z の多価解析関数である．z 平面の中で，$p(z)$ と $q(z)$ の極の周りを回ると，関数 w_1 と w_2 はその 1 次結合に変わり，それゆえ v は式 (5) に従って変換される，つまり，$v \mapsto \dfrac{\alpha v+\beta}{\gamma v+\delta}$ となる．ここで，v を代数関数と仮定する．すると v は有限個の分枝しか持たず，それゆえ (5) の形の変換の有限群が得られる．このような群はすべてわかっているので，代数解を持つ 2 階線形微分方程式はすべて記述できることになる．

例 6. 平面格子の対称群． 実数体 $\mathbb{R}$ の離散のアナロジーは整数環 $\mathbb{Z}$ であり，ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のは加群 $\mathbb{Z}^n$ であり，群 $GL(n,\mathbb{R})$ のは群 $GL(n,\mathbb{Z})$ である．このアナロジーに従って，今度は群 $GL(2,\mathbb{Z})$ の有限部分群を調べ，その後 $GL(3,\mathbb{Z})$ での例を扱う．これらの群を，それを含む群 $GL(2,\mathbb{Z})$ や

$GL(3,\mathbb{Z})$ の中で，共役を除いて分類することを問題にしよう．次節 §14 では，この問題が結晶学において物理的な応用を持っていることを見ていく．

考えている問題は，幾何的には次のように説明される．群 $\mathbb{Z}^n$ を n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトルの作る群 C として実現し，このような部分群 $C \subset \mathbb{R}^n$ を**格子**と言う．任意の群 $G \subset GL(n,\mathbb{Z})$ は，ある格子 C を保つ $\mathbb{R}^n$ の線形変換の作る群として実現される．$\mathbb{R}^n$ の線形変換の作るどんな有限群に対しても，不変計量が，つまり $\mathbb{R}^n$ 上の正定値 2 次形式 $f(x)$ であって，すべての $g \in G$ に対して $f(g(x)) = f(x)$ を満たすものが存在する（§10 例 4 参照）．2 次形式 f は $\mathbb{R}^n$ 上にユークリッド空間の構造を定め，群 G は格子 C を自分自身に写すような直交変換の作る有限群になる．こうして，問題は，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の格子の対称群の分類問題と同値になる．対称性という言葉は，もちろん，格子を自分自身に写す直交変換という意味で使っている．任意の格子に対して，その対称群が有限群になることは容易に確かめられる[7]．格子 C_1 と C_2 の対称群 G_1 と G_2 に対して，もし C_1 を C_2 に写し G_1 を G_2 に写す線形変換 φ が存在すれば，つまり，$C_2 = \varphi(C_1)$ かつ $G_2 = \varphi G_1 \varphi^{-1}$ であり，φ によって G_1 の C_1 上の作用が G_2 の C_2 上の作用に移されるならば，G_1 と G_2 は，行列式が ± 1 の整係数行列全体の群の共役な部分群に対応する．このような格子は**同値**であると言う．

（点対称以外の）自明でない対称性を持つ格子を**ブラヴェ格子**と言い，その対称群を**ブラヴェ群**と言う．

さて，この問題を平面格子の場合に調べよう．研究は 2 つの段階に分けられる．何よりまず，直交変換の作るどんな有限群がある格子を保つか（つまりその格子の対称性から作られるか）を決定しなければならない．次節で明らかになる理由によって，これらの群は**晶族**[8]と呼ばれる．もちろん，それらは定理 II と III のリストに含まれる．基礎的な道具は，初等的に証明できる「平面格子が，格子のある点の周りの回転で自分自身に写され得るのは，角が $0, \pi, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}$ のときだけである」という命題である．

---

[7] ［訳註］ここでは上述のように，直交変換にしているので，原点を動かしていないことに注意しよう．また，格子の（原点も動かす）対称性全体が作る群を，格子の対称群ということも多い．

[8] ［訳註］晶族 (crystal class) という言葉は結晶の形の分類の言葉であるが，対応する対称性の群である（結晶）点群と同等に扱われている．

定理 VII. 2 次元の晶族は

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_6,\ D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_6$$

の 10 個である.

図 23 にいろいろな対称群を持つ格子の基本平行四辺形を図示した. 図の下には, 対応する格子を許容する対称性の群を示した. (左から右へ) 任意の平行四辺形, 任意の長方形, 任意のひし形, 正方形, 2 つの正三角形からなる平行四辺形である. 対応する格子は, それぞれ一般格子, 長方格子, ひし形格子, 正方格子, 6 角格子と呼ばれ, $\Gamma_{一般}, \Gamma_{長方}, \Gamma_{ひし形}, \Gamma_{正方}, \Gamma_{6角}$ と書かれる[9].

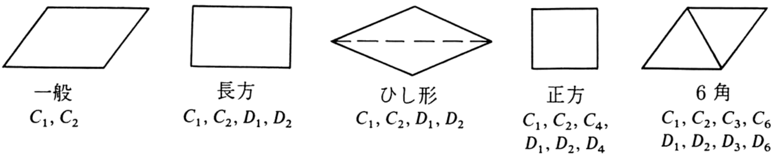


図 23

しかしながら, 定理 VII では我々の問題はまだ解けているわけではない. 同値でない対称群が同じ晶族に属すかも知れないのである. 代数的に言えば, 2 つの群 $G, G' \subset GL(2,\mathbb{Z})$ は直交変換群の中では共役であっても, $GL(2,\mathbb{Z})$ の中では共役でないこともあり得る, ということである. 例としては, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で生成される G と $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成される G' という 2 つの位数 2 の群がある. これらの群は幾何的には, 基本平行四辺形が図 23 の長方形とひし形の格子の位数 2 の対称性に対応している. その対称性は, 前の場合は長方形の水平の辺に関する鏡映で, 後の場合はひし形の水平な対角線に関する鏡映である. これらの群が同値でないのは, 長方形に対応する格子には問題の対称性によって $+1$ 倍されるベクトルと -1 倍されるベクトルから

9 ［訳註］2 つの正三角形を合わせた平行四辺形が 6 角と呼ばれるのを見るには, 内角が 60° の頂点の廻りに 6 つ集めて見るか, 内角が 120° の頂点の廻りに 3 つ集めて見ればよい.

なる基底があるが，ひし形に対応する格子は対称性で不変なベクトルと対称性で -1 倍になるベクトルによっては生成されないことによる．しかし，こういう現象はあまり頻繁には起こらない．

定理 VIII. 平面格子の対称群で非同値なものは次の 13 個である．

$$C_1(\Gamma_{一般}),\ C_2(\Gamma_{一般}),\ C_4(\Gamma_{正方}),\ C_3(\Gamma_{6角}),\ C_6(\Gamma_{6角}),$$

$$D_1(\Gamma_{長方}),\ D_1(\Gamma_{ひし形}),\ D_2(\Gamma_{長方}),\ D_2(\Gamma_{ひし形}),\ D_4(\Gamma_{正方}),$$

$$D_3'(\Gamma_{6角}),\ D_3''(\Gamma_{6角}),\ D_6(\Gamma_{6角}).$$

括弧内の格子は，対応する群をその対称性の群として実現するものを示している．

2 つの格子 $\Gamma_{長方}$ と $\Gamma_{ひし形}$ の上に実現された群 D_1 の例はすでに扱った．群 D_2 は同じ格子の上に実現され，D_1 に点対称をつけ加えて得られる．もっとも微妙なものは格子 $\Gamma_{6角}$ の対称性の群としての D_3 の実現 D_3' と D_3'' である．その双方が D_6 に含まれ，(群 D_3 から予想されるように) 正三角形の対称群であるが，この正三角形は D_6 によって保たれる正 6 角形に異なる仕方で内接するのである (図 24 参照)．

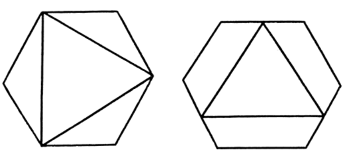


図 24

例 7. 空間格子の対称性の群．例 6 の分析で導入した用語を説明なしに使って，群 $GL(3,\mathbb{Z})$ の有限部分群を考えよう．

定理 IX. 32 の 3 次元の晶族がある．

結晶系	晶族
3 斜晶系	$C_1 \times Z$, C_1
単斜晶系	$C_2 \times Z$, C_2, C_2C_1
斜方晶系	$D_2 \times Z$, D_2, D_2C_2
3 方晶系	$D_3 \times Z$, D_3, D_3C_3, $C_3 \times Z$, C_3
正方晶系	$D_4 \times Z$, D_4, D_4C_4, D_4D_2, $C_4 \times Z$, C_4, C_4C_2
6 方晶系	$D_6 \times Z$, D_6, D_6C_6, D_6D_3, $C_6 \times Z$, C_6, C_6C_3
立方晶系	$O \times Z$, O, OT, $T \times Z$, T

群に対する記号は定理 V のものである[10]．表の中の群の並べ方は，各行の初めに置いた群の部分群であるようにしてある[11]．

各行の群を総称して結晶学では**結晶系**（または晶系）と言い，表にあるような風変わりな名前で呼ばれている[12]．各結晶系はある多面体の対称性の全体として特徴付けられる．これらの多面体は図 25 に挙げてある[13]．(それらの平面でのアナロジーは平行四辺形，長方形，ひし形，正方形，正三角形である．)

晶族は，本 [32] から引用した図 26 の表 1 でのように，非常に明瞭な形に表わされる．表 1 の記号はその前のページの表 2 に与えられている[14]．

3 次元格子の同値でないすべての対称群のタイプを分類することはしないが，異なるタイプのものは全部で 72 もある．

---

10 ［訳註］原著の表には（英語版はさらに多くの）間違いがあると思われる．表と図 26 が 1 対 1 に対応していなかった．表の正方晶系の $C_4 \times Z$ と 6 方晶系の $C_6 \times Z$ は，それぞれ C_4Z と C_6Z と書かれていた．また図 26 の表 1 の 2 ページ目の右上にある $C_3 \times Z$ も C_6C_3 と書かれていた．これは図の引用もとから間違っていたと思われる．

11 ［訳註］結晶の周期性は平行移動群によって得られる．基本領域がコンパクトな平行移動群は 1 次独立なベクトル α, β, γ によって生成され，基本領域は平行 6 面体である．結晶格子の 1 つの格子点を固定する対称性の群（点群と言う）が，結晶系の分類を与えており，表の一番左の群になる．

12 ［訳註］原語はラテン語を借りたものでそれを風変わりだと言っているのだが，ほとんど直訳の日本語の名称はそれなりに合理的な感じがする．ただし，3 方晶系には等軸晶系という用語が使われることもある．

13 ［訳註］図 25 は §14 定理 II の後の注意にもある「繰り返し平行 6 面体」を図示したもので，結晶学の書物や辞典で描かれている色々な図と形が違う感じがするかも知れない．1 つには基本領域が一意的に定まらないからでもあるし，1 つには結晶の多様性に関心があるからでもある．また，そういう書物では，α, β, γ の間の角や長さのデータでの分類が与えられていることが多い．

14 ［訳註］表 2 は対称軸の種類を表わしているが，表 1 で同じ晶族の図の中に同じタイプの対称軸が沢山出てくるときは，見る向きを変えてあったり，黒白反転してあったりする．

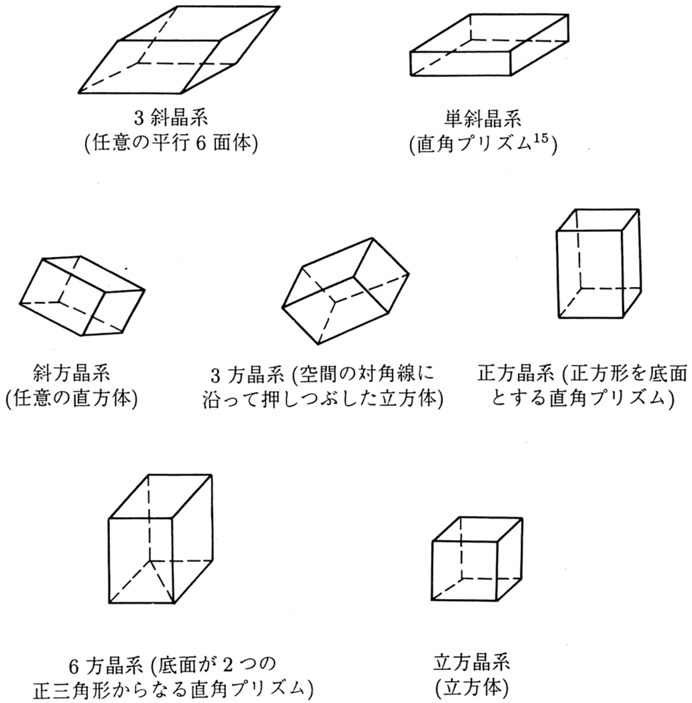


図 25

上に述べた 2 次元と 3 次元の構成の高次元への一般化は，もちろん，このように詳しく研究することはできない．いくぶん一般的な定理があるだけである．

定理 X． ジョルダンの定理．任意の n に対し，n 次元空間の有限運動群 G は可換な正規部分群 A を持ち，G での指数 $[G:A]$ の値は n だけによる定数 $\psi(n)$ によって抑えられる．

---

15 ［訳註］直角プリズムは底面が平行四辺形の直角柱のことと 思ってよい．以降は 3 方晶系以外は底面の形が特殊になっていく．

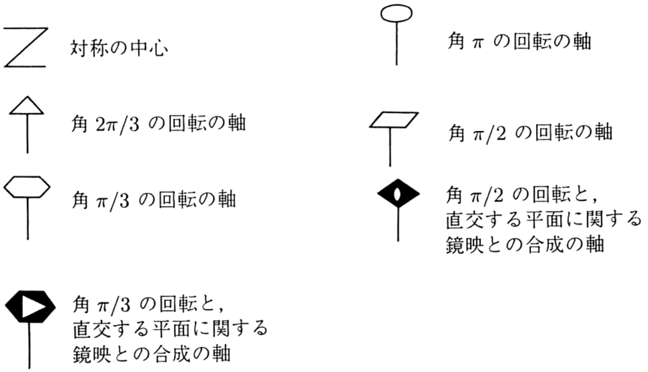


図 26　表 2（表 1 の記号の説明）

3 次元の場合には，指数 2 の正規部分群として巡回群 C_n を含む正 2 面体群 D_n を考えると，定理の状況がわかるだろう．

ブラヴェ群のアナロジーとして，次の定理が容易に証明される．

定理 XI．与えられた n に対して，行列式 ± 1 の整係数行列全体の群の同値でない有限部分群は，有限個である．

こうして問題は，与えられた群 G の同型な $GL(n,\mathbb{Z})$ の部分群を，共役を除いて記述することに帰着する．ここに出てくる問題は，§10 で議論し §17 でさらに議論することになる有限群の表現の問題と類似なものになる．相違点は，ベクトル空間の線形変換（と非退化な行列）の代わりに，今度は加群 $\mathbb{Z}^n$ の自己同型（と行列式 ± 1 である整係数の n 次行列）を扱うことにある．対応する概念は，（これ以上厳密な定義はしないが）n 次元の整表現である．基礎的な結果に，もう 1 つのジョルダンの定理がある．

定理 XII．ジョルダンの定理．各有限群には，与えられた次元の非同値な整表現は有限個しかない．

例 8． 対称群は，有限鏡映群という重要な型の群の特別な場合である．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $e_1,\ldots,e_n$ を選んで，集合 $\{1,\ldots,n\}$

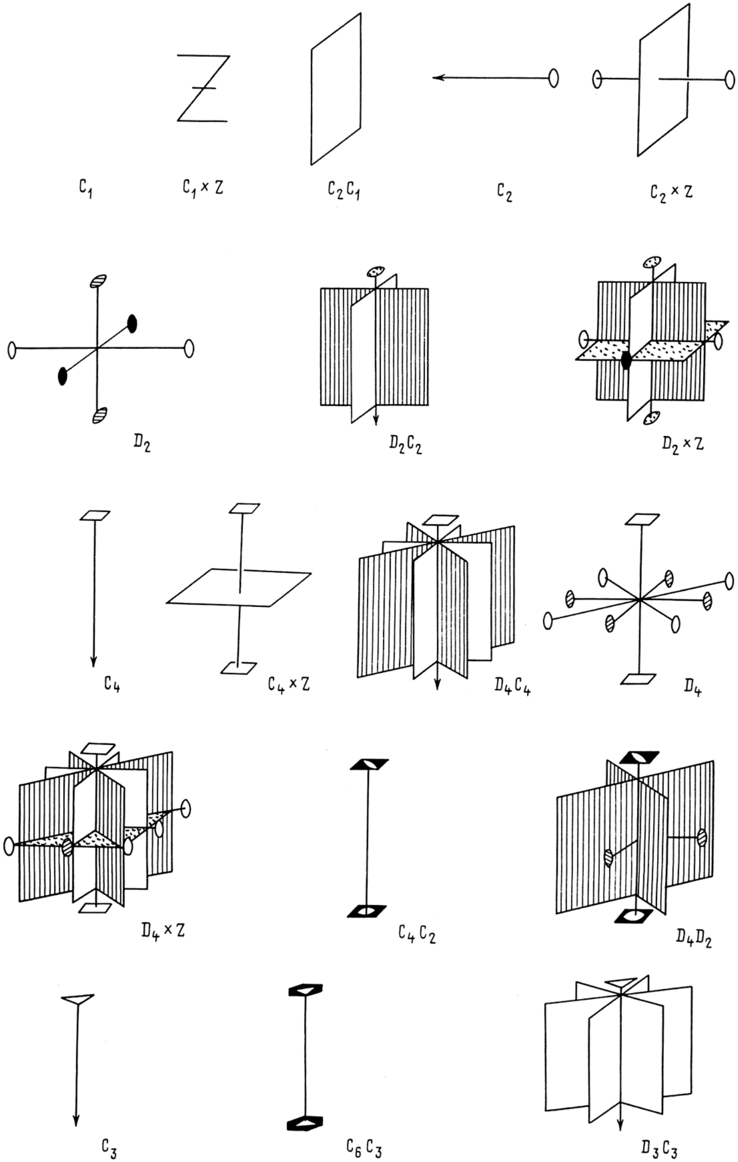

C_1
$C_1 \times Z$
C_2C_1
C_2
$C_2 \times Z$
D_2
D_2C_2
$D_2 \times Z$
C_4
$C_4 \times Z$
D_4C_4
D_4
$D_4 \times Z$
C_4C_2
D_4D_2
C_3
C_6C_3
D_3C_3

図 26　表 1

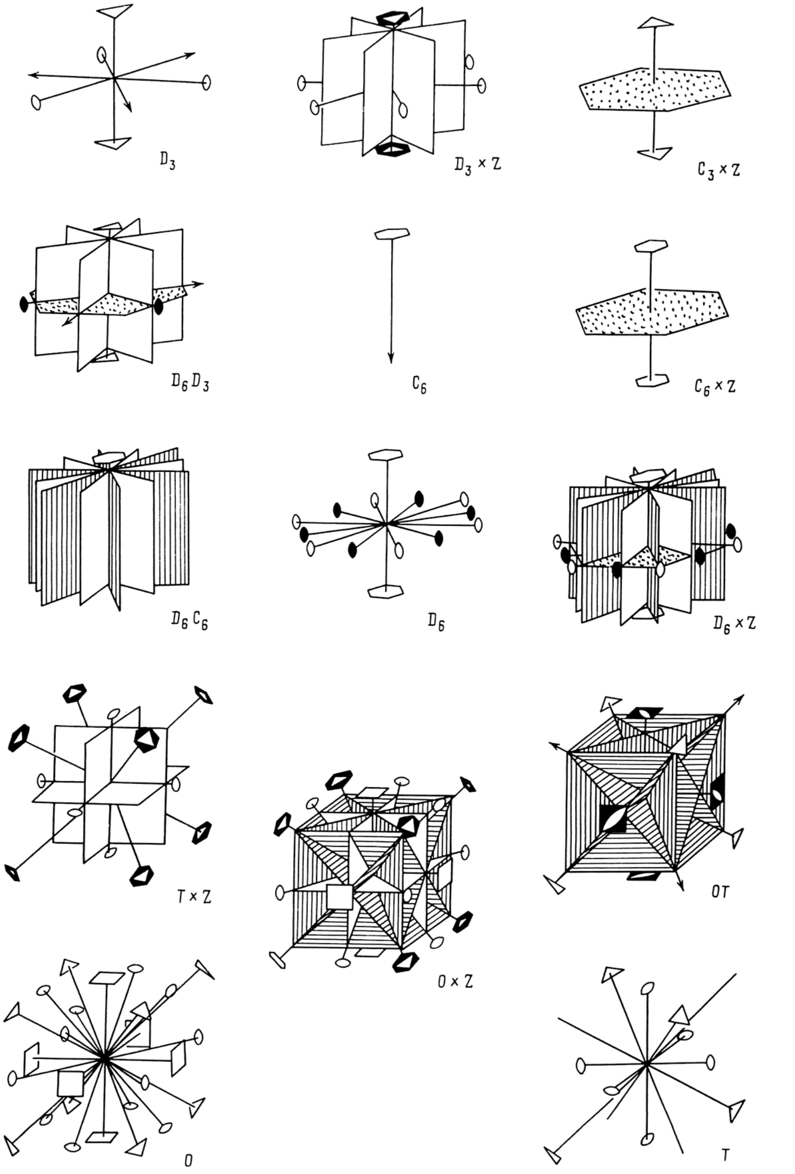

D_3
$D_3 \times Z$
$C_3 \times Z$
$D_6 D_3$
C_6
$C_6 \times Z$
$D_6 C_6$
D_6
$D_6 \times Z$
$T \times Z$
OT
$O \times Z$
O
T

図 **26**　表 1（続き）

の置換 σ に，この基底のベクトルを，$\hat{\sigma}(e_i) = e_{\sigma(i)}$ として，置換する線形変換 $\hat{\sigma}$ を対応させる．この対応 $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ は $\mathfrak{S}_n$ と，$\mathbb{R}^n$ の直交変換群のある部分群 S との同型である．明らかに S は互換 σ_i に対応する変換 $\hat{\sigma_i}$ によって生成される．$\hat{\sigma_i}$ に関して不変なベクトルの集合は，$e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i + e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots, e_n$ を基底とする線形部分空間 $L \subset \mathbb{R}^n$ であり，明らかに $\dim L = n-1$ である．超平面 L に直交するベクトル e（たとえば $e = e_i - e_{i+1}$）を考えると，$\hat{\sigma_i}$ は

$$\hat{\sigma_i}(x) = x \quad (x \in L \text{ のとき}),$$

$$\hat{\sigma_i}(e) = -e \quad ((e, L) = 0 \text{ のとき})$$

という式で与えられる.（超平面 L を選んで）このような式で与えられる変換 s を**鏡映**と言う．明らかに $s^2 = e$ である[16]．鏡映からなる生成系を持つ直交変換の群を**鏡映群**と言う．

有限鏡映群論の基礎的な結果は次の通りである．

定理 XIII. ユークリッド空間 E の鏡映で生成される任意の有限群 G に対して，空間 E の一意的な直和分解

$$E = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$$

で，E_i が互いに直交する G 不変な部分空間であり，さらに以下の条件を満たすものが存在する．

(1) E_0 はすべての $g \in G$ に対して $g(x) = x$ となるベクトル $x \in E$ からなる．各 E_i $(i = 1, \ldots, p)$ は $\mathbf{0}$ と E_i 以外の G 不変な部分空間を持たない．

(2) G_i をベクトル $x \in E_j$ $(j \neq i)$ を固定するすべての変換 $g \in G$ からなるものとすると，G_i はまた鏡映群で，群 G は群 G_i $(i = 1, \ldots, p)$ の直和である．

たとえば，n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ 上の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の上に述べた作用に対しては，$\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_1$，ただし，

---

16 ［訳註］この e は変換群の単位元で，恒等変換を表わす．

$$E_0 = \{\alpha(e_1 + \cdots + e_n)\},$$
$$E_1 = \{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0\} \tag{6}$$

という分解がある．

鏡映群 G は，E が 0 と E 以外に G 不変な部分空間を持たないとき，**既約**であると言う．

$\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ を鏡映の集合とする．明らかに

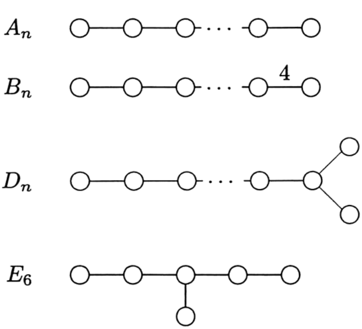
$$\sigma_i^2 = e \tag{7}$$

である．生成元の間のこれ以外のある特別な，つまり

$$(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}} = e \tag{8}$$

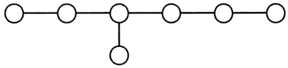
という形の関係式を記述する便利な方法がある．このために，鏡映 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ に対応する頂点を持つグラフを描き，辺については 2 つの頂点[17]を結ぶのを，$m_{ij} > 2$ として関係式 (8) が成り立つときとする．さらに $m_{ij} > 3$ のときは，対応する辺の上に数 m_{ij} を書く．$m_{ij} = 2$ としての (8) 式が，単に σ_i と σ_j の可換性を意味することは簡単にわかる．

定理 XIV．既約な有限鏡映群 G には，以下に挙げたグラフの 1 つで記述される関係式を満たす鏡映からなる，生成系 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ がある．この関係式が群 G を決定する．

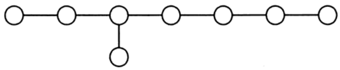


[17] ［訳註］σ_i と σ_j に対応するもの．

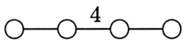
E_7



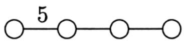
E_8



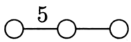
F_4



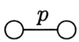
H_4



H_3



$I_2(p)$



$(p=5$ または $p \geq 7)$

（A_n や B_n などでの）下つきの指数 n はグラフの頂点の個数を表わし，それは同時に G が働く空間の次元でもある．

グラフ A_n は，分解 (6) の空間 E_1 に働く群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ という，すでに知っている例に対応している．また，座標で $\alpha_1+\cdots+\alpha_{n+1}=1$ かつ $\alpha_i \geq 0$ という条件で与えられる正 n 次元単体の対称性の群としても解釈することができる．

グラフ B_n は，n 次元ベクトル空間のある正規直交基底のベクトルに対する任意の置換と符号の反転からなる群に対応している．これは n 次元ベクトル空間の立方体（つまり正 8 面体）の対称性の群であり，位数は $2^n n!$ である．$n=3$ のときは $O \times Z$ である．

グラフ D_n は，B_n に対応する群の指数 2 の部分群に対応していて，基底ベクトルの置換と，基底ベクトルに $\prod \varepsilon_i=1$ を満たす数 $\varepsilon_i= \pm 1$ を掛けることとからなる．$n=3$ のときは $OT \subset O \times Z$ である（図 21 参照）．

グラフ H_3 は正20面体の対称性の群に対応し，$I_2(p)$ は正2面体群 D_p に対応している．グラフ H_4 と F_4 は4次元のある正多面体の対称性の群に対応している．

定理 XIV に挙げられた群は，$H_3, H_4, I_2(p)$（$p = 5$ または $p \geq 7$）を除いて，すべて晶族である．

例 9. 有限群を構成するもう1つの方法があるが，それは後で詳しく述べることにして，今のところは以下の例を挙げて暗示するだけにしておこう．有限体 $\mathbb{F}_q$ に成分を持つ非退化な n 次行列全体の群 $GL(n, \mathbb{F}_q)$ を考える．これは，ベクトル空間 $\mathbb{F}_q^n$ の線形変換の作る群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q^n)$ と同型である．それぞれの変換は，$\mathbb{F}_q^n$ の基底を選ぶことによって定まる．それゆえ，$|GL(n, \mathbb{F}_q)|$ は $\mathbb{F}_q^n$ の基底 $e_1, \ldots, e_n$ の数に等しい．e_1 としては，$\mathbb{F}_q^n$ の0でない $q^n - 1$ 個のベクトルのどれをとることもできる．e_1 を選んだら，e_2 としては，e_1 に比例しない $q^n - q$ 個のベクトルのどれをとることもできる．e_1, e_2 を選んだら，e_3 としては，e_1 と e_2 の1次結合でない $q^n - q^2$ 個のベクトルのどれをとることもできる，などとなる．結果として，

$$|GL(n, \mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1}) \tag{9}$$

が得られる．

群 $GL(n, \mathbb{F}_q)$ の応用の1つとして，定理 XI の証明が得られる[18]．素数 $p \neq 2$ を固定して，準同型 $\varphi_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(p) = \mathbb{F}_p$ を考える．これは行列群の準同型

$$\varphi_p : GL(n, \mathbb{Z}) \to GL(n, \mathbb{F}_p)$$

を定める．核は $A = E + pB$ の形で，$\det A = \pm 1$ を満たす行列からなる．任意の有限群 $G \subset GL(n, \mathbb{Z})$ が，φ_p によって $GL(n, \mathbb{F}_p)$ のある部分群に同型に写されることを証明しよう．$GL(n, \mathbb{F}_p)$ の部分群は有限個しかないので，このことから定理は証明され，(9) は $|G|$ の1つの評価を与える．準同型 $G \to GL(n, \mathbb{F}_q)$ の核は $G \cap \mathrm{Ker}\, \varphi_p$ であり，必要なことはこの部分群が単位元だけからなることである．このために，$\mathrm{Ker}\, \varphi_p$ が E 以外に有限位数の元

---

[18]［訳註］以下は定理 XI の証明である．

を含まないことを証明する．$A=E+p^rB$, $B\in M_n(\mathbb{Z})$ で，B のすべての元が p で割れることはないとし，$A^n=E$ であるとする[19]．2 項定理により，

$$np^rB+\sum_{k=2}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}p^{rk}B^k=0$$

となる．しかし，初等的な代数の議論によって，$p>2$ かつ $k>1$ に対して和の記号の中のすべての数は np^r より大きな p のベキで割り切れることになるが，これは矛盾である．

19 ［訳註］この n は次元とは関係がない．有限位数になるという要請は有限群 G の元であることから来るものである．しかし，この n をたとえば m に取り換えたからといって，以下の証明自体には何の影響もないので，大らかにやっているわけである．さらに，行列の等式なのに，あたかも数の等式のような言葉遣いをしている．ロシア数学の荒っぽさと言うより，対象に対する親密さの表明と見る方が生産的かも知れない．

§ 14.　群の例：無限離散群

さて，無限群の考察に移ろう．もちろん,「有限ではない」という否定するだけの特徴付けでは，実際に起きる状況を何も反映しない．通常，群の無限個の元は，何かある構成的なプロセスまたは式によって定義される．その式はパラメータを含むかもしれず，そのパラメータは整数，実数，さらにはある多様体の点を値にとるかも知れない．これが形式的でない分類の出発点であって，整数値の場合を離散群と言い，後の場合を連続群と言うのである．離散群の一番簡単な例は無限巡回群である．その元は g^n の形をしていて，n はすべての整数を走る．

それはともかく，離散群は，もっと厳密な言葉遣いでいう「離散な」変換群として現れることが多い．たとえば，整数の群は関数 $\sin 2\pi x$ を保つ直線の平行移動 $x \mapsto x+\alpha$ のなす群に同型である（α は整数）．まずこの場合を考えることにしよう．

X を位相空間とする．すべての例において，X は局所コンパクトかつハウスドルフであると仮定されているが，大抵の場合は微分可能多様体か複素解析多様体としている．空間 X の自己同型の群 G が**離散的**（または**不連続**）であるとは，任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ に対して，$K \cap gK$ が空でないような変換 $g \in G$ の全体が有限集合のときに言う．軌道の集合 $G\backslash X$ の上に，標準写像

$$f : X \to G\backslash X$$

による原像が開集合であるような部分集合を開集合とすることによって，位相を導入する．あらゆる点 $x \in X$ の固定部分群が e だけであるとき，G が**自由に作用**すると言う．この場合，任意の点 $\xi \in G\backslash X$ には，その近傍 U で，標準写像 $f : X \to G\backslash X$ による原像が開集合の離散和に分かれ，その各々が f によって U に同相に写されるようなものが存在する．言い換えれば，X

は空間 $G\backslash X$ の**不分岐被覆**である．特に，X が微分可能多様体か解析多様体ならば，$G\backslash X$ はまた同じタイプの多様体になる．

もしある群 $\mathfrak{G}$ が同時に多様体でもあれば（この場合は次の §15 で考察する），部分群 $G\subset\mathfrak{G}$ が $\mathfrak{G}$ 上の左正則作用に関して離散的なとき，G を**離散部分群**と言う．

商空間 $G\backslash X$ の構成は，新しい位相空間を作る重要な方法である．それを直観的に表示することは，**基本領域**の概念と関係している．集合 $\mathcal{D}\subset X$ が基本領域と呼ばれるのは，任意の点 $x\in X$ の軌道が $\mathcal{D}$ と交わり，内点 $x\in\mathcal{D}$ の軌道が $\mathcal{D}$ と交わるのは x 自身だけということが成り立つときである．すると，$\mathcal{D}$ の閉包 $\overline{\mathcal{D}}$ に 1 つの軌道の異なる点が属すのは $\mathcal{D}$ の境界にあるときしかなく，1 つの軌道に属する $\overline{\mathcal{D}}$ の境界上の点を同一視することによって，空間 $G\backslash X$ を視覚化することができる．たとえば，上に述べた，変換 $x\mapsto x+\alpha$ からなる直線の平行移動の群に対しては，基本領域は区間 $[0,1]$ である．境界の点を同一視すると円周が得られる．空間 $G\backslash X$ がコンパクトであることと，G がその閉包がコンパクトであるような基本領域を持つこととは同値である．

例 1. n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトルの作る群の離散部分群.

定理 I. 群 $\mathbb{R}^n$ の離散部分群は $\mathbb{Z}^m$ $(m\le n)$ と同型であり，m 個の 1 次独立なベクトル $e_1,\dots,e_m$ の整係数の 1 次結合全体からなる．

このような群は**格子**と言われる．格子の基本領域は，ベクトルの系 $e_1,\dots,e_m$ につけ加えて基底 $e_1,\dots,e_n$ を作り，

$$\mathcal{D}=\{\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n \mid 0\le\alpha_1,\dots,\alpha_m\le 1\}$$

と置くことによって構成することができる．空間 $G\backslash\mathbb{R}^n$ がコンパクトであることは，$m=n$ と同値である．この場合，基本領域 $\mathcal{D}$ はベクトル $e_1,\dots,e_n$ によって作られる平行多面体になる．

$n=2$ のときは，平面 $\mathbb{R}^2$ は複素数平面と考えることができ，そうしたときには $\mathbb{C}$ と書くことにする．G が $\mathbb{C}$ の中の格子であれば，商空間 $G\backslash\mathbb{C}$ は，$\mathbb{C}$ から 1 次元複素多様体の構造を受け継ぎ，コンパクトなリーマン面になる．

その種数[1]は1に等しく，種数1のすべてのコンパクト・リーマン面はこのようにして得られることを示すことができる．リーマン面 $G\backslash\mathbb{C}$ 上の有理形関数は，複素1変数の有理形関数 $f(z)$ で，平行移動 $z \mapsto z+\alpha$ $(\alpha \in G)$ に関して不変なものであり，つまり， G の元を周期とする**楕円関数**である．

定理．2つのリーマン面 $G_1\backslash\mathbb{C}$ と $G_2\backslash\mathbb{C}$ が共形同値であることと，格子 G_1 と G_2 が相似であることは同値である．

例 2．結晶群． これは例1（より正確には $m=n$ の場合）の直接の一般化である．結晶の原子は空間の中で，離散的かつ極めて対称的に配列されている．これは空間の中での原子相互の相対的な位置関係が，無限に繰り返されるということである．より正確に言えば，有界領域 $\mathcal{D}$ で，空間の任意の点を $\mathcal{D}$ のある点に，結晶の対称性によって移すことができるものが存在するのである．そして結晶の対称性とは，結晶の物理的性質を保つ（つまり，任意の原子を同じ元素の原子に移し，原子の間のすべての関係を保つ）空間の運動のことである．言い換えれば，結晶の対称群 G は3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の運動の作る離散群であり，空間 $G\backslash\mathbb{R}^3$ はコンパクトである．こうしたわけで，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の運動の作る離散群 G で，その商空間 $G\backslash\mathbb{R}^n$ がコンパクトなものを**結晶群**と呼ぶのである．

次の定理は結晶群論の主結果である．

定理 II．ビーベルバッハの定理．結晶群 G に含まれる平行移動全体は正規部分群 A をなし，$A\backslash\mathbb{R}^n$ はコンパクトで，指数 $[G:A]$ は有限である．

$n=3$ の場合，このことは，あらゆる結晶に対してある平行6面体（結晶の対称群 G の正規部分群 $A \lhd G$ の基本領域）Π が存在し，結晶のすべての性質が Π とそれを平行移動したすべての $g\Pi$ $(g \in A)$ では同じになり，そしてこれらの平行移動によって空間全体が埋めつくされる，ことを意味している．Π は結晶の**繰り返し平行6面体**と呼ばれる．

一般の場合には，定理Iによって，A はある格子 $C \cong \mathbb{Z}^n$ のベクトルによる平行移動からなる．有限群 $F=G/A$ は C の対称群である．このことか

[1] ［原註］ここでは，読者がリーマン面とその種数について既知であると仮定している．

ら，ジョルダンの定理（§13 定理 XII）を使うと次の定理が得られる．

定理 III. n **が与えられたとき，**n **次元空間の結晶群の数は有限である．**

ここで，空間 $\mathbb{R}^n$ のアフィン変換によって互いに移すことができるとき，2 つの群 G_1 と G_2 を同じと考えている．この性質は，G_1 と G_2 が抽象群として同型であることと同値なことを示すことができる．

結晶学の影響で生まれた結晶群だが，非常に自然な群論的特徴付けがある．つまり厳密には，結晶群とは，(より大きなアーベル部分群に含まれないような）$\mathbb{Z}^n$ に同型な有限指数の正規部分群を含む，群 G のことである．

結晶学にとって，3 次元空間におけるすべてのタイプの結晶群のリストを作ることは極めて重要なことである．実際，どんな結晶に対しても，その群，その基本領域，そしてその内部における原子の位置を指定することができれば，結晶がどれほど成長しようと結晶全体を決定することができるのである．これは有限の項目で結晶を表わす方法を与えており，結晶学の表を作り上げるために実際に使われた．すべての結晶群の表はここで与えるには長すぎるが，それがどんなものかは 2 次元の場合から想像することができるだろう．

定理 IV．平面上の異なる結晶群の数は 17 である．

これらにはそれぞれ，ある格子 C のベクトルでの平行移動からなる正規部分群 $A \triangleleft G$ がある．変換 $g \in G$ はもちろんこの格子を自分自身に移している．このとき，元 $g \in A$ はその平行移動になっている．それゆえ，有限群 $F = G/A$ はこの格子の対称性の群であって，§13 定理 VIII で述べた 13 のタイプのどれかに属している．しかしながら，2 つの異なる群 G が同じ格子 C を持ち，C の同じ対称群を定めることもあり得る．その例を与えるために，長方格子 $C = \Gamma_{\text{長方}}$ と，恒等変換と OB 軸に関する鏡映からなる格子 C の対称性の群 D を考える（図 27 参照[2]）．

群 G は，格子 C のベクトルによる平行移動の群 T と上の直交変換の群 D によって生成されると考えることができる．群 G は，図 27 に描かれたパターンの対称性の群として特徴付けることができる．一方，OB 軸に関する

[2] ［訳註］この図のパターンは，OA の下の方向にも広がっていると考えている．

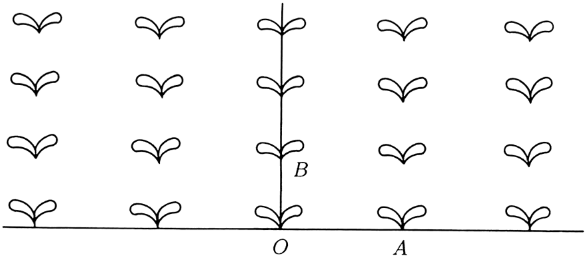


図 27

鏡映にベクトル $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ での平行移動を合成した運動 s と，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ での平行移動 t を考える．s と t で生成される群を G_1 と書く．すると，s^2 は $\overrightarrow{OB}$ での平行移動だから，群 T と格子 C は双方の場合で同じになり，G と G_1 の運動で生成される C の対称群もまた一致する．しかし，G と G_1 は同型ではない．G は鏡映を含んでいるが，容易に確かめられるように，G_1 は平行移動と，格子の 1 つの垂直線に沿った平行移動に鏡映を合成した運動しか含んでいない．特に，位数 2 の元が群 G にはあるが，群 G_1 にはない．群 G_1 は図 16 に描かれたパターンの対称性の群と一致する．

この例と同じように，§13 定理 VIII であげた 13 の対称性の群から，13 の 2 次元結晶群で，対応する格子のベクトルによる平行移動とその格子の対称性である（上の例での群 G の構成と同じように作用する）直交変換とによって生成されるものを作ることができる．この場合，格子の任意の点 x に対する固定部分群 G_x は，上の 13 のタイプから選んだ対称群に同型になる．しかし，場合によっては（例での G_1 の構成のような）もっとこみいった構成が可能になる．そのとき固定部分群は対称群より小さくなるだろう．というのも，ある対称性は（上の例での変換 s のように）平行移動との合成の形でしか G の中に現れないことがあるからである．このようにして，新しく，対称群 $D_1(\Gamma_{長方})$ に対して 1 つの群（上で構成した群 G_1），$D_2(\Gamma_{長方})$ に対して 2 つの群，$D_4(\Gamma_{平方})$ に対して 1 つの群を構成することができる．これで 17 の群が得られる．

最後に，対称群 $D_4(\Gamma_{\text{平方}})$ に対する「新しい」群の例を挙げよう．その群には，点 O の周りの回転角 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ の平面の回転の群 C_4 と，O を通る軸 ℓ に沿っての平行移動にこの軸に関する鏡映を合成した変換 s を含ませる．群 G はこれらの変換で生成される．σ が回転角 $\pi/2$ の回転であれば，$s' = \sigma s \sigma^{-1}$ は s に相似な変換だが，ℓ に垂直な軸 ℓ' を持っている．平行移動の部分群は，軸 ℓ と ℓ' に沿った平行移動 s^2 と s'^2 によって生成される．構成された群 G は図 28 のパターンの対称性の群である．

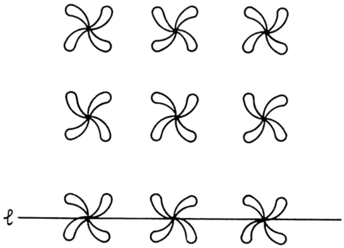


図 28

今構成したような群は，平面のパターンの対称性の群と解釈することができるので，「装飾群」（英語では「壁紙パターン群」という）とも呼ばれる．17 全部の群それぞれに対応する装飾パターンの完全なリストは本 [80] にある．幾つかの群を特徴付けるために特に考案された装飾の例が図 16, 27, 28 である．もちろん，純粋に審美的な考察から創り出された装飾はずっと興味深いものである．本 [98] からとられた図 29 の装飾はこの例である．興味深いことだが，これはテーベの墓からとられたもので，古代エジプトの職人が製作したものである．このことは，群の概念の中に公理化された対称性のアイデアが，すでに非常に古い時代に深く理解されていたことを示している．

3 次元の場合ははるかに複雑である．

定理 V．3 次元空間の異なる結晶群の数は 219 である．

定理 III と同じように，同型な群は，または同じことだが，アフィン変換で移り合う群は，同じ群と考えている．結晶学においては，異なる結晶群の

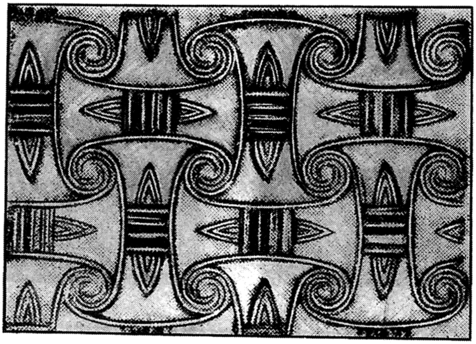


図 29

数が 230 と与えられることが多い．このことは，そこでは，空間の向きづけを保つ変換で移り合うときに同じ群と考えるということから来ている．平面の場合は，この 2 つの「同値性」の概念から，同じ分類が得られるのである．

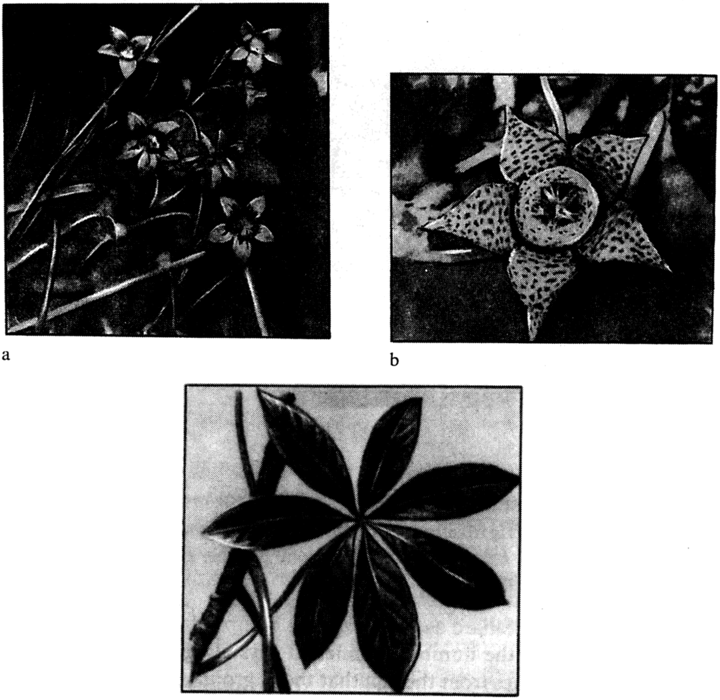
219 の群のすべてが，実際の結晶の対称群として実現される．

結晶群の理論は，§13（例 7）で考えた格子の対称性の有限群の役割を説明してくれる．結晶の対称性は結晶群 G 全体によって与えられるが，原子の間の距離が非常に小さいという理由で，巨視的な観点から目につくのは平行移動の群 A ではなくて，格子 A の対称群である商群 G/A である．面白いことに，§13 定理 VII の群のリストの中には，$\pi/2, \pi/3$ かその倍数の角の回転を含む群しかないことに注意しよう．それゆえ結晶の対称性としては，これらの回転しか現れない．それにもまして驚くべきことは，自然界でこれらとは違う対称性に出会うことの多さである．たとえば，ゼラニウムやカンパニュラ[3]の花が 5 次の対称性を持っていることは誰でも知っている．『植物の一生』[1] という本からとった図 30 で，カンパニュラ (a) や牛角（斑入りスタペリア）[4](b) の花には 5 次の対称性を，バオバブの葉の配置 (c) に 7 次の

[3] ［訳註］ホタルブクロ属キキョウ科の総称．英語版ではブルーベルという名前が使われているが，それは日本名イトシャジンであり，異なるものである．北アメリカでも見られる種類にしたのであろう．

[4] ［訳註］スタペリアはガガイモ科の小型多肉植物で，約 10 種ほどあるが主にアフリカ南部から東部にかけて自生する．スタペリアの中には王犀角（S. ギガンテア）や帝王犀角（S. ノビリス）などがあるがいずれも南アフリカ産である．現在園芸植物の中には 5 弁の萼花や 5 裂の花冠を持つものは少なくない．

対称性を見出すことができる．



a　b　c

図 30

例 3. 非ユークリッド結晶学． 離散的な運動群は，ユークリッド空間に対してだけでなく，他の空間に対しても興味のあることが多い．ここでロバチェフスキー平面 Λ[5]の場合を述べるが，次の 2 つの条件を満たす，平面 Λ の向きづけを保つ運動の作る離散群だけを考えることにする．(1) 運動 $g \in G$ $(g \neq e)$ は平面 Λ のどの点も固定せず，(2) 空間 $G\backslash\Lambda$ はコンパクトである．ユーク

[5] ［訳註］ロバチェフスキー Лобачевский の頭文字 Л に対応するギリシャ語のラムダ Λ を使用したもの．L は他のものを表わすのに頻用されるので避けたのであろう．

リッド平面の場合にはこの 2 条件を満たす群は，ある格子のベクトルでの平行移動の群だけであった．

このような群 G に対する興味は，条件 (1) を満たす空間 $G\backslash\Lambda$ が多様体，今の場合は曲面になるという事実に関連して生まれてきた．複素上半平面 $\mathbb{C}^+$ におけるロバチェフスキー平面のポアンカレの解釈を使えば，曲面 $G\backslash\Lambda$ は上半平面の複素構造を受け継ぎ，(条件 (2) を仮定すると）コンパクト・リーマン面になる．リーマン面 $G\backslash\mathbb{C}^+$ 上の有理形関数は，群 G に関して不変な $\mathbb{C}^+$ 上の有理形関数であり，**保形関数**と言われる．これを，空間 $G\backslash\mathbb{C}$ を考えた例 1 の状況と比べることができる．その場合は種数 1 のコンパクト・リーマン面が得られた．今考えている場合には，種数 >1 のすべてのコンパクト・リーマン面がちょうど得られることが証明される（ポアンカレ–ケーベの一意化定理）．こうして，この 2 つの場合を合わせると，すべてのコンパクト・リーマン面の群論的記述が得られる．(残った種数 0 の場合はリーマン球面である.)

これらのタイプの群 G の基本領域としては，ロバチェフスキー平面の $4p$ 角形であって，p 組の 4 辺がそれぞれ 1 つおきに長さが等しいものをとることができる．つまり，辺を $a_1, b_1, a_1', b_1', \ldots, a_p, b_p, a_p', b_p'$ とするとき，a_i と a_i'，b_i と b_i' が長さの同じ線分になっている．辺 a_i を a_i' に，また b_i を b_i' に移す変換（同一視される辺の向きは図 31 に示した）が，G の生成元である．

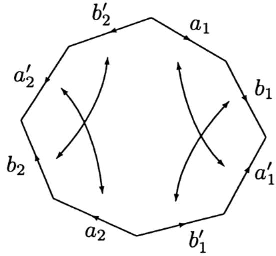


図 31

この際多角形が満たさなければならない関係は，辺 a_i と a_i' の，かつ b_i

と b'_i の長さが等しく，角の和が 2π である（これは，$G\backslash\Lambda$ ではすべての頂点が 1 点になるように貼り合わされるという事実に関係している）ということだけである．この曲面 $G\backslash\Lambda$ の種数は p である．

例 3a.（ポアンカレ・モデルではなく）ロバチェフスキー空間のケイリー–クラインの解釈で考えると，例 3 の中の場合でもある重要なものが見えてくる．$f(x,y,z)$ を整係数の不定値 2 次形式とする．形式 f を保つ整係数の変換からなる群 $G\subset SL(3,\mathbb{Z})$ を考える．x,y,z を射影平面の斉次座標と考え，$f>0$ で定義される集合の射影変換の群，つまり，ケイリー–クラインの解釈でのロバチェフスキー平面 Λ の運動群として G を実現する．空間 $G\backslash\Lambda$ がコンパクトであることが，方程式 $f(x,y,z)=0$ に $(0,0,0)$ 以外の有理解がないことと同値であることを示すことができる．(この方程式が解を持つための判定条件は，§7 定理 III であるルジャンドルの定理によって与えられる.) この場合，例 3 の条件 (1) は満たされないかも知れない．G が e 以外に有限位数の元を含めばこういうことが起こるが，そのとき，条件 (1) を満たす有限指数の部分群 $G'\subset G$ が存在する．§13 例 9 の最後に展開した議論によれば，G' として（素数 $p\neq 2$ をどのように選んでも）$g\equiv E \pmod p$ を満たす行列 $g\in G$ からなる部分群が得られることが証明できる．

例 4. 行列式が 1 で整数を成分とする 2 次行列からなる群 $SL(2,\mathbb{Z})$．この群の意義は，2 次元格子の 2 つの基底 e_1,e_2 と f_1,f_2 には次の関係式が成り立つことにある．つまり，関係式

$$f_1=ae_1+ce_2,\quad f_2=be_1+de_2$$

が，ある

$$a,b,c,d\in\mathbb{Z}\quad \text{かつ}\quad ad-bc=\pm1\quad \text{つまり}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{Z})$$

に対して成り立っている．もし f_1 から f_2 への回転の向きを e_1 から e_2 への向きと同じにすることも要求するならば，$ad-bc=1$ つまり $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$ となる．相似を除いてのユークリッド平面の格子の分類が，しばしば問題となる．たとえば例 1 で見たように，種数 1 のコンパクト・リーマン

面の分類はこの分類に帰着する．そこでのように，平面を複素平面 $\mathbb{C}$ として実現すると，相似は 0 でない複素数を掛けることによって与えられる．z_1, z_2 を格子 $C \subset \mathbb{C}$ の基底とする．ベクトル z_1 と z_2 の間の角が $\leq \pi$ であるとし，z_1 から z_2 への回転が反時計回りになるようにベクトルの順序を選んでおく．z_1^{-1} を掛けることで表わされる相似を考えると，基底 1, $z = z_1^{-1} z_2$ を持つ相似な格子 C' が得られる．上の仮定から，z は上半平面 $\mathbb{C}^+$ にあることになる．そのとき，$ad - bc = 1$ を満たすある $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ に対する基底 $cz + d, az + b$ が相似によって $1, w$ に移されるならば，2 つの基底 $1, z$ と $1, w$ は相似な格子を定める．この相似は $(cz + d)^{-1}$ を掛けることによって与えられなければならないので，$w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ となる．そこで，上半平面 $\mathbb{C}^+$ 上の群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用を，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して，$gz = \dfrac{az + b}{cz + d}$ と定義する．

ここで $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は恒等変換として作用するので，群 $SL(2, \mathbb{Z})/N$ の作用が得られたことになる．ここで $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ である．この商群は $PSL(2, \mathbb{Z})$ と書かれ，モデュラー群と呼ばれる．相似を除いて定まる格子の集合は，モデュラー群 G に対して $G \backslash \mathbb{C}^+$ と表わすことができる．モデュラー群は上半平面に離散的に作用し，その基本領域は図 32 の影をつけた図形として描かれている．

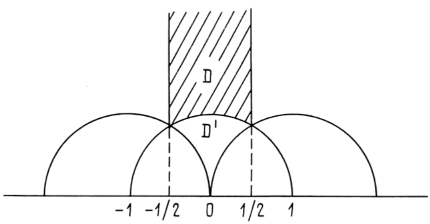


図 32

この領域 D をモデュラー図形と呼ぶ．これは有界でないが別の重要な性

質を持っている．よく知られているように，上半平面はロバチェフスキー平面のモデルであり，向きづけを保つこの平面の運動は

$$z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1, \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$$

という変換で与えられる．こうして，モデュラー群はロバチェフスキー平面の離散的な運動群である．ロバチェフスキー幾何としては，**モデュラー図形の面積は有限**である．こうして見ると，曲面 $G\backslash\mathbb{C}^+$ はコンパクトではないが，自然な計量での面積は有限である．

モデュラー群は例 3 で考えた群に似てはいるが，その中の群ではない．1 つには，その変換のあるもの（たとえば $z \mapsto -1/z$）は固定点を持ち，2 つには，$G\backslash\Lambda$ はコンパクトではない．ロバチェフスキー幾何の観点からモデュラー図形を考えれば，例 3 とのアナロジーはもっとはっきりする．それは無限遠点に 1 つの頂点を持つ三角形で，その頂点に向かって行く辺は限りなく近づいて行く．このことは，D と同値な領域である図 32 の D' で見ればもっとわかりやすい．

例 5. 群 $G=GL(n,\mathbb{Z})$．これは群 $GL(n,\mathbb{R})$ の離散部分群で，$GL(n,\mathbb{R})$ と同じ空間に作用する．特に重要なのは，正定値の実行列 A を正の数を掛けることを除いて考えたものの集合 $\mathcal{X}_n$ の上の作用 $g(A)=gAg^*$ である（$n=2$ の場合は §12 例 4 参照）．この作用は，2 次形式の整係数の同値性の概念を表わしている．このとき，基本領域はまたコンパクトではないが,（群 $GL(n,\mathbb{R})$ の作用で不変な測度の意味で）有界な体積を持っている．

群 $GL(n,\mathbb{Z})$ は，次節で述べる**算術群**という重要なクラスに属している．

例 6. 自由群. シンボル $s_1,\dots,s_n$ の集合を考える（簡単のためにこの集合は有限であるとする．議論のためにはそうする必要はないのだが）．各シンボル s_i に対して，もう 1 つのシンボル s_i^{-1} を考える．語と呼ばれるのは，任意の順序にシンボル s_i や s_j^{-1} を（書いた順に）並べたもので，たとえば $s_1s_2s_2s_1^{-1}s_3$ のようなもののことである．シンボルを 1 つも含まない空語 e も許すことにする．語が**被約**であるとは，列のどの場所でもシンボル s_i と

s_i^{-1}, s_i^{-1} と s_i が隣り合っていないときに言う．語の逆とは，s_i を s_i^{-1} に，s_j^{-1} を s_j に置き換え，反対の順序に書いたもののことである．2つの語 A と B の**積**とは，A を書いた後で B を書き，被約な語に（または空語）になるまで，隣り合った s_i と s_i^{-1} を取り除いて得られる語のことである．この積の作用を持った被約な語の集合が，群になることを確かめるのは難しくない．この群は n 個の生成元を持つ**自由群**と言い，$\mathcal{S}_n$ と書かれる．明らかに1つのシンボルだけからなる語 $s_1, \ldots, s_n$ は生成元で，s_i^{-1} は s_i の逆元であり，任意の語はさまざまの s_i や s_j^{-1} の積と考えることができる．

x, y を生成元とする自由群 $\mathcal{S}_2$ は，ある1次元複体，すなわち点とそれらを結ぶ線分とからなる位相空間，の変換の群として実現することができる．このために，点としては群 $\mathcal{S}_2$ のすべての異なる元をとり，被約な語 A と B に対応する点を，A に右から x, y, x^{-1}, y^{-1} を掛けることにより B が得られるときに，線分で結ぶ（図33参照[6]）．

明らかに，もし2つの語 A と B を表わす点が線分で結ばれていれば，任意の $C \in \mathcal{S}_2$ に対する CA と CB に対しても同じことが成り立つ．それゆえ，群 $\mathcal{S}_2$ の左正則作用（§12参照）はこの複体上の $\mathcal{S}_2$ の作用を定める．（図33のように右向きと上向きに）2つの矢印の向きを区別することによってこの複体上に「2重の向きづけ」を導入すれば，群 $\mathcal{S}_2$ がこの2重に向きづけられた複体の自己同型全体の群になることは容易に確かめることができる．

n 個の生成元 $g_1, \ldots, g_n$ を持つ任意の群 G を考える．$s_1, \ldots, s_n$ の被約語を $g_1, \ldots, g_n$ に関して同じ表現を持つ元に対応させると，$\mathcal{S}_n$ から G への準同型になることは容易にわかる．それゆえあらゆる群は自由群の準同型像であり，したがって，自由群は群論において，加群の理論における自由加群や，代数の理論における非可換多項式環（§5と§8参照）と同じ役割を果たす．

群 G を，ある自由群の正規部分群 N による商群として

$$G = \mathcal{S}_n / N$$

[6] ［訳註］図では，右から x を掛けることを右へ，y を掛けることを上へ，x^{-1} を掛けることを左へ，y^{-1} を掛けることを下へ，1つ移動する変換とみなしている．

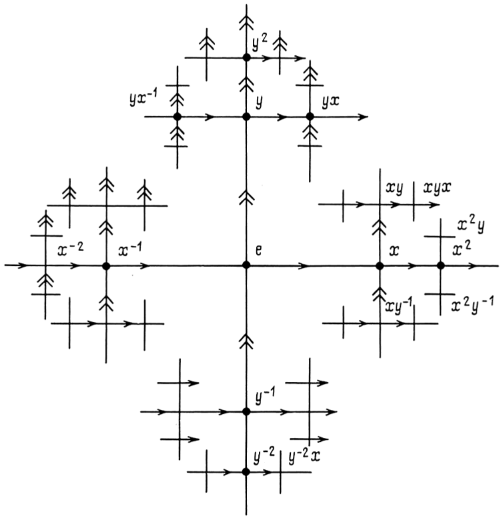


図 **33**

と表わす．元 $r_1, \ldots, r_m$ がその共役元とともに N を生成するとき，群 G の**定義関係式**と言われる．明らかに G では関係式

$$r_1 = e, \ldots, r_m = e$$

が成り立っている（ここで r_i は G の生成元 $g_1, \ldots, g_n$ に関する語と見なしている）．この定義関係式は一意的に正規部分群 N を，つまり群 G を定める．これが，すでに使っている，**関係式によって定義される群**という用語の厳密な意味である．有限個の生成元を持つ群を**有限生成**といい，それがまた有限個の関係式によって表わすことができれば，**有限表示**されると言う．たとえば，§13 の (1), (2), (3) 式は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の定義関係式であり，§13 の (7), (8) 式は鏡映で生成される有限群の定義関係式である．例 4 の $PSL(2, \mathbb{Z})$ は行列 $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と $t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で生成され，定義関係式が

$$s^2 = e, \quad t^3 = e$$

の形をしている群であることを示すことができる.

群を生成元と関係式で与えることを（たとえ生成元や関係式の数が有限であっても），群の適切な記述と考えることができるだろうか？ $g_1, \ldots, g_n$ が群 G の生成元とするとき，群自身がどういうものかを理解するには，$g_{i_1}^{\alpha_{i_1}} g_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots g_{i_m}^{\alpha_{i_m}}$ という形の異なる表示が，群の元としていつ同じになるかがわからないといけない．この問題は**語の問題**または**同一性の問題**と呼ばれる．これは自由群に対しては自明であり，たとえば1つの関係式で与えられる群のようにある非常に特殊なクラスの群に対しては解かれているが，一般の場合には不可能なまでに難しいことがわかってきた．同じことがこのタイプの別の問題に対しても言える．それは，生成元と関係式で与えられる2つの群が同型であるかどうかを知るという問題である.（これは**同形問題**と呼ばれる.）

この2つの問題は，数理論理学においてアルゴリズムの厳密な定義が創られたとき，新しい地平に移されたのである．この時までは，同一性の問題を解き，生成元を使って与えられた2つの表示の同一性を確立するための，アルゴリズムと呼ばれる手続きを提案できただけだった．今では,「同一性の問題と同形問題は常に解くことができるか？」という問題が「適切」であることがわかっている.

これはすぐに解かれてしまった．有限個の生成元と関係式で与えられた群の中には，同一性の問題を解くことができない群が存在することがわかっている．同形問題もまた，単位元だけからなる群に対してさえ解くことができない！

おそらく，数理論理学の概念を純粋に群論的な問題の研究に応用することが原理的に不可欠であることを最も鮮やかに示す例は次のものであろう.

ヒグマンの定理．有限個の生成元と無限個の関係式を持つ群が，ある有限個の関係式で定義された群の部分群と同型になるのは，その関係式の集合が帰納的可算集合であることと同値である.（最後の用語は，数理論理学にも関係しており，ある集合のすべての元を1つずつ構成して得る帰納的な方法の，直観的な概念を形式化したものである.）

群を生成元と関係式で与えることは，トポロジーで起こることが多い.

例 7. 基本群. X を位相空間とする．その基本群は，連続的に変形することを除いて考えた閉じた道からなっている．$x \in X$ を始点，$y \in X$ を終点とする道とは，区間 $I = [0 \le t \le 1]$ から X への連続写像

$$f : I \to X$$

であって，$f(0) = x$, $f(1) = y$ を満たすもののことである．$x = y$ のとき，道は**閉じている**と言う．$x \in X$ を始点，$y \in X$ を終点とする道 $f : I \to X$ と，$y \in X$ を始点，$z \in X$ を終点とする道 $g : I \to X$ との**合成**とは，

$$(fg)(t) = f(2t) \qquad (0 \le t \le 1/2),$$
$$(fg)(t) = g(2t-1) \qquad (1/2 \le t \le 1)$$

で与えられる写像 $fg : I \to X$ のことである．同じ始点 x と終点 y を持つ 2 つの道 $f : I \to X$ と $g : I \to X$ が**ホモトピック**であるとは，正方形 J から X への連続写像

$$\varphi : J \to X, \qquad J = \{0 \le t, u \le 1\}$$

があって，

$$\varphi(t,0) = f(t),\ \varphi(t,1) = g(t),\ \varphi(0,u) = x,\ \varphi(1,u) = y$$

を満たすときに言う[7]．x_0 を始点かつ終点とする閉じた道をホモトピーを除いて考えたものは，道の合成として定義される積のもとで群をなす．この群を空間 X の**基本群**と言い，$\pi(X)$ と書く[8]．一般の場合には，基本群は点 x_0 の取り方によるので $\pi(X, x_0)$ と書かれるが，X の任意の 2 点が道で結ばれるなら[9]（以降常にこれを仮定する），$x_0 \in X$ に対する群 $\pi(X, x_0)$ はすべて同型である．$\pi(X) = e$ のとき，空間 X は**単連結**と言う．

X が胞複体（すなわち，互いに交わらない胞体 —— いろいろな次元の開球の像 —— の和）であって，0 次元胞体がただ 1 つなら，基本群 $\pi(X)$ は，1 次元胞体に対応する道を生成元とし，2 次元胞体に対応する定義方程式を持

7 ［訳註］そして，φ を f と g を結ぶホモトピーと言う．
8 ［原註］$\pi_1(X)$ とも書く．それは，$n = 2, 3, \ldots$ に対する群 $\pi_n(X)$ が存在することによる．これらは §20 で定義する．
9 ［訳註］これを満たす位相空間を**弧状連結**と言う．

つ．たとえば，1 次元複体は 2 次元胞体を持たないので，その基本群は自由群である．n 個の円周の「ブーケ」（$n=4$ の場合の図 34 参照）の基本群は，n 個の生成元を持つ自由群である．

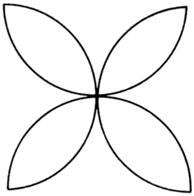


図 **34**

p 個のハンドルを持つ球面（$p=2$ の場合は図 35 参照）に同相な向きづけられたコンパクト曲面は，($p=2$ の場合に）図 31 で図示したように，$4p$ 角形の隣り合う辺の対を貼り合わせることによって得ることができる．

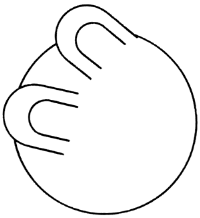


図 **35**

したがって，1 個の 0 次元胞体と，$2p$ 個の 1 次元胞体と，1 個の 2 次元胞体とからなる胞複体である．それゆえ，その基本群は $2p$ 個の生成元 $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_p, t_p$ を持つ．ここで，s_i は道 a_i と a_i' から得られ，t_i は b_i と b_i' から得られる．これらの間の関係式は，$4p$ 角形の周を辺の向きを考えながら辿る道に対応するものであり，

$$s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} \dots s_p t_p s_p^{-1} t_p^{-1} = e \tag{1}$$

である．

群に対する同形問題の非決定性は,（そのような基本群を持つ多様体を構成することによって）次元 ≥ 4 の多様体の同相問題の非決定性を示す可能性を与えてくれる．

基本群は，以前に考察した離散変換群に密接に関係している．つまり，X が弧状連結な空間であれば，連結かつ単連結な空間 $\hat{X}$ が存在して，その上に $\pi(X)$ に同型な群 G が離散的かつ自由に作用して，$X = G\backslash\hat{X}$ となる．空間 $\hat{X}$ を X の**普遍被覆**と言う．逆に，$\hat{X}$ が連結かつ単連結で，群 G が $\hat{X}$ に離散的かつ自由に作用していれば，$\hat{X}$ は $X = G\backslash\hat{X}$ の普遍被覆で，G は $\pi(X)$ と同型である．それで，例 3 ではリーマン面 X は $G\backslash\mathbb{C}^+$ と表わされており，つまり，$\mathbb{C}^+$ は X の普遍被覆で，$G \cong \pi(X)$ である．これから，G が関係式 (1) で定義されることがわかる．図 33 に図示した複体 $\hat{X}$ は明らかに単連結で，自由群 $\mathcal{S}_2$ はその上に自由に作用している．この作用に関する基本領域が 2 つの辺 ex と ey からなることは容易にわかる．それゆえ，$\mathcal{S}_2\backslash\hat{X}$ は，図 34（ただし $n = 2$ のとき）でのような (x と y を e と同一視することによって得られる）2 つの円周のブーケであり，$\hat{X}$ はこのブーケの普遍被覆である．

例 8．結び目群． **結び目**とは，3 次元空間の中の自己交差しない滑らかな閉曲線 Γ のことである．問題は，空間の連続変形であるイソトピーを除いた結び目の分類である．その際，基礎的な不変量となるのは Γ の**結び目群**，つまり補集合の基本群 $\pi(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)$ である．結び目の図に描くには，それを平面に射影し，得られた図式での交点で，曲線が上を通るか下を通るかを指定すればよい（図 36 参照）．

結び目群の生成元は，射影された曲線を分割する交点から交点までの区間に対応している（たとえば，図 36 の道 γ は区間 ABC に対応している.）定義関係式が交点に対応することを示すことができる．最も簡単な結び目は，結ばれていない円周で，自己交差がないように射影することができ，それゆえその結び目群は無限巡回群である．

結び目群の役割は，たとえば次の定理によって説明される．

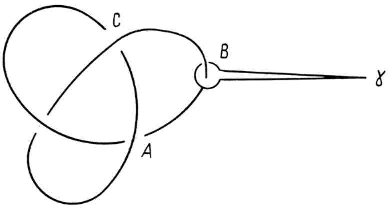
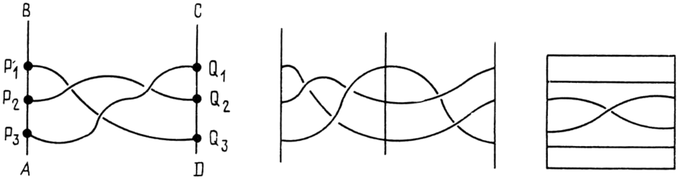


図 **36**

定理． ある結び目が結ばれてない円周にイソトピックであるには，結び目群が無限巡回群であることが必要かつ十分である．

ここで，実質的なトポロジーの問題が，同形問題の特殊な場合になっているという例に出会うことになる．

例 9．組み紐群． 3 次元空間に正方形 $ABCD$ を考え，辺 AB と CD のそれぞれに n 点ずつ，$P_1,\dots,P_n$ と $Q_1,\dots,Q_n$ を置く．組み紐とは，滑らかな n 本の互いに交わらない曲線で，正方形 $ABCD$ の上に作られた立方体に含まれ，始点が $P_1,\dots,P_n$ のどれかで終点が $Q_1,\dots,Q_n$ のどれかであるもののことである（ただし，順序は変わっていてもよい（図 37 (a) 参照））．



(a)　(b)　(c)

図 **37**

組み紐はイソトピーを除いて考える．組み紐の積は図 37 (b) で図示したようにする．P_i と Q_i を同一視すると閉じた組み紐が得られる．閉じた組み紐の，イソトピーを除いて同じと考える，類は組み紐群 Σ_n をなす．Σ_n の生

成元は，2 つだけの糸[10]を交換する組み紐 σ_i $(i=1,\ldots,n-1)$ である（図 37 (c) 参照）．定義方程式は

$$\begin{aligned}\sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i \qquad (j\neq i\pm 1),\\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\end{aligned} \tag{2}$$

である．

2 つの組み紐がいつイソトピックであるかという問題は，関係式 (2) によって定義される組み紐群に対する同一性の問題として述べ直される．この特殊な場合には，同一性の問題は解くことが可能で，実際に解かれている．これはトポロジーへの群論の応用の 1 つである．

組み紐群の意義は，平面上の n 個の点の衝突を許さない運動を，組み紐が定めていることにある．このとき，点の順序は重要ではない．厳密な結果は次のようになる．$\mathcal{D}$ を，ある $i\neq j$ に対して $z_i=z_j$ を満たす点 $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ の集合とする．対称群 $\mathfrak{S}_n$ は $\mathbb{C}^n$ 上に座標の置換として作用し，$\mathcal{D}$ を保つ．多様体 $\mathfrak{S}_n\setminus(\mathbb{C}^n\setminus\mathcal{D})$ を X_n と書く．組み紐群 Σ_n は，この空間の基本群 $\Sigma_n=\pi(X_n)$ である．

点 $\xi\in X_n$ は，n 個の異なる複素数 $z_1,\ldots,z_n$ の非順序集合である．それは，多項式

$$t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n=(t-z_1)\cdots(t-z_n)$$

の係数 $a_1,\ldots,a_n$ を指定することによって与えることができる．それゆえ，$\Sigma_n\cong\pi(\mathbb{C}^n\setminus\Delta)$ であると言うことができる．ここで，$\mathbb{C}^n$ は変数 $a_1,\ldots,a_n$ の空間で，Δ は係数 $a_1,\ldots,a_n$ を持つ多項式の判別式を 0 と置いて得られるものである．

10 ［訳註］隣り合うものだけを考える．

§ 15.　群の例：リー群と代数群

さて，連続的に変化するパラメータによって元(げん)が与えられる群の考察に移ろう．別の言葉で言うと，そのような群は幾何や物理の問題に関係してよく現れるが，その元の集合はそれ自身「幾何」を持っている．この幾何は非常に単純なこともあるが，自明とはとても言えないこともある．

たとえば，数直線のずらしの群 $x \mapsto x + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ は，原点を変えることからくる座標変換を反映するもので，明らかに，加法群としての実数と同型で，直線の点によってパラメータづけられている．固定点 O の周りの平面の回転の群では，各元は回転角 φ によって定まっており，φ の 2 つの値が同じ回転を定めるのは，値が 2π の整数倍だけ異なっているときである．それゆえ回転群は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ と同型で，O を中心とする円周の点によってパラメータづけられている．回転は，出発点として選んだ点の移り先の点によって与えられる．この同じ円周を，群 $2\pi\mathbb{Z}$ の基本領域と見なすことができる．これは区間 $[0, 2\pi]$ の両端を同一視したものである．しかしながら，この程度の単純な例では，まだまだこの場合に生まれる特殊な状況に対する感覚は得られない．

例 1．3 次元回転群． この群は，1 点が固定された剛体の運動を記述するために生まれた．ここで物体は 3 次元的で，平面に含まれることはないとする．そこで，固定点 O を中心とする座標系を，剛体的に物体に結びつける．すると，物体の運動は空間全体の運動を定める．その際，動座標系における各点の座標は変わらず，つまり 3 次元空間は物体とともに運動する．もし時刻 $t = 0$ と $t = t_0$ でのすべての点の位置を比較すれば，明らかにそれらの間の距離が変わらないように運動している．言い換えれば，初期位置から時刻 $t = t_0$ での位置への移行は，(原点 O を固定する) 3 次元空間の直交変換 φ_t である．しかしながら，φ_t は t に，それも明らかに連続的に依存してい

るから，3 次元空間の向きづけを保たなければならない．向きづけを保つ 3 次元空間の直交変換を**回転**と言う．実際にそれは，ある軸の周りの定まった角の回転によって実現される．これが**オイラーの定理**で，初等的な幾何的考察によって証明することができる．これはまた次のことからも導くことができる．問題の変換 A の特性多項式 $|\lambda E - A|$ は（A が向きづけを保つから $|A| > 0$ なので）定数項が負の 3 次多項式であり，正の根を持たねばならないが，A が直交変換だから，それは 1 でなければならない．これに対応する固有ベクトルが，回転軸を定める．

こうして，回転群の元は，点 O を固定して動く剛体によって占められるすべての可能な位置を記述しており，この物体の実際のどんな運動もこの群の中の（時間 t をパラメータとする）曲線によって記述される．回転群は，固定点を持って動く剛体の**配位空間**になる．この群は「幾何的」にはどのようなものなのだろうか？　これを見るために，軸 ℓ の周りの角 φ の回転を，向きが ℓ の方向で，長さが φ $(-\pi \le \varphi \le \pi)$ であるようなベクトルによって与えよう[1]．この形のベクトルは，O を中心とし半径を π とする球全体を占める．しかし，境界の球面の点で，軸が同じで異なる値 $\varphi = -\pi$ と $\varphi = \pi$ に対応するものは，同じ回転を表わしている．こうして，回転群は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の球から，その境界の球面の対蹠点を同一視して得られるものとして記述することができる．よく知られているように，この同一視によって得られるのは 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ であり，これが回転群の幾何的記述である．

3 次元の回転群の同じ記述を，別の方法で得ることができる．絶対値 1 の四元数 q からなる群 G を考える（§8 例 5 参照）．$q = a + bi + cj + dk$ と書けば，この群は

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

という方程式で与えられ，つまり 3 次元球面 S^3 になる．$\mathbb{H}^-$ を $\mathrm{Re}\, x = 0$ で定義される純虚四元数の作る 3 次元空間とする．群 G は $\mathbb{H}^-$ の上に $x \mapsto qxq^{-1}$ $(x \in \mathbb{H}^-, q \in G)$ という規則で作用する．$|qxq^{-1}| = |q||x||q|^{-1} = |x|$ なので，この作用は $\mathbb{H}^-$ の直交変換になる．q が恒等変換として働くことと

[1] ［訳註］軸 ℓ と言うとき，直線というだけでなく正の向きも指定されていると考えていて，負の長さもその意味で理解される．

$q = \pm 1$ が同値であることが容易にわかるので，G から 3 次元空間の直交変換群への準同型 f で，核が ± 1 であるものが得られたことになる．群 G は連結だから，f の像は回転群に含まれないといけないし，次元を比較すれば，一致しなければいけないことも容易にわかる．言い換えれば次の定理が得られる．

定理 I. 3 次元空間の回転群は，絶対値 1 の四元数の群を部分群 $\{\pm 1\}$ で割った商群 $G/\{\pm 1\}$ と同型である．

G は 3 次元球面だから，つまり，3 次元空間の回転群は球面 S^3 から対蹠点を同一視することによって得られる．これでもう一度，この群と 3 次元射影空間の同一視が得られたことになる．

こうして，変換群の例（直線のずらしの群，平面の回転群，3 次元空間の回転群）で，それぞれの元が自然に，ある多様体（直線，円周，3 次元射影空間）X の点によって 1 対 1 にパラメータづけられているものを見てきた．問題の群を変換群と考えることから抽象的に踏み出す次のステップは，ある多様体 X が群の元の集合を適切に表わし，群演算がこの集合 X 上に与えられると仮定することである．こうしてリー群の概念に到達した．ただ，X を微分可能多様体とするか複素解析多様体とするかによって 2 種類に分かれるが，それぞれ微分可能リー群または複素解析リー群と呼ぶ．定義は次のようにする．

定義. 群であると同時に微分可能（または複素解析）多様体である G に対して，2 つの写像

$$G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

と

$$G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$$

が微分可能（または複素解析的）であるとき，G をリー群と言う．

リー群 G の元の集合が多様体であるという事実が，G に幾何を与えることになる．代数（つまり群演算があること）は，この幾何が等質なものであ

ることを意味している．左正則表現の元は**群の元によるずらし**と呼ばれ，（微分可能または複素解析的な）群 G の推移的な変換群を定めている．これを使ってたとえば，単位元 $e \in G$ での接ベクトル τ から始め，元 g による左ずらしを使って任意の点 $g \in G$ での接ベクトル τ_g を得ることができ，つまり群 G 全体の上のベクトル場が得られる．このようなベクトル場は**左不変**であると言われる．同じようにして，G 上の**左不変**（または**右不変**）**微分形式**を構成することができる．最後に，同じ方法で，G 上の**左不変**（または**右不変**）**リーマン計量**を構成することができる．

3 次元空間の回転群を記述している定理 I は，多くのリー群にとって典型的な幾何的性質の例を与えている．第 1 に，G を絶対値 1 の四元数の群とするとき，準同型 $G \to G/\{\pm 1\}$ は明らかに不分岐被覆である．群 G は 3 次元球面と微分同相だから，連結かつ単連結であり，それゆえ回転群の普遍被覆である（§14 例 7 参照）．このことから，回転群の基本群 π の位数が 2 であることがわかる．回転群に関するトポロジー的な情報ばかりでなく，微分幾何的な情報も得ることができる．その不変リーマン計量は，群 G の不変計量と矛盾しないように構成することができる．しかし G は球面 S^3，つまり，正のリーマン曲率を持つ多様体である．それゆえ回転群に対しても同じことが成り立つ．任意のコンパクト・リー群に対して，曲率が非負であり，単位元での曲率が 0 である方向がアーベル部分群に対応するような，右移動と左移動に関して不変なリーマン計量が存在することを示すことができる．

リー群 G の閉部分多様体 $H \subset G$ が同時に部分群でもあるとき，G の**リー部分群**と呼ばれる．この場合，剰余類の集合 $H\backslash G$ はまた多様体であり，商写像 $G \to H\backslash G$ と G の $H\backslash G$ 上の作用が微分可能（または複素解析的）であることを示すことができる．G の $H\backslash G$ 上の作用が推移的なので，$H\backslash G$ は G に関する等質多様体である．§12 の関係式 (9) はここでは

$$\dim G = \dim H + \dim H\backslash G \tag{1}$$

という関係式に対応している．

以下では，コンパクト・リー群と複素解析リー群という 2 つの型のリー群を詳しく取り扱い，双方の型の最も重要な例と，それらの間の関係を述べる．

A. コンパクト・リー群

例 2. トーラス．実 n 次元ベクトル空間 L の格子 $C=\mathbb{Z}e_1+\cdots+\mathbb{Z}e_n$ を考える．ここで，$e_1,\ldots,e_n$ は L の基底である．商群 $T=L/C$ はコンパクトである．これはリー群であり，トーラスと呼ばれる．$L=\mathbb{R}e_1+\cdots+\mathbb{R}e_n$ であるから，

$$T\cong(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times\cdots\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

である．

商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は円周であり，n 次元トーラスは n 個の円周の直積である．トーラスには非常に多くの応用があるが，そのうちの 3 つを述べよう．

(a) 周期 2π の周期関数は円周 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の関数である．後で見るように，この立場はフーリエ級数論に新しい見方を与えてくれる．

(b) L を複素平面とする．この場合はすでに §14 例 1 で考察した．$C\subset\mathbb{C}$ が格子なら，トーラス $\mathbb{C}/C$ は $\mathbb{C}$ から複素解析多様体の構造を受け継ぐ．複素多様体としてのトーラス $\mathbb{C}/C$ の次元は 1 である．複素次元 1 のコンパクトな複素解析的リー群がトーラスだけであることを示すことができる．同じように，任意のコンパクトな複素解析的リー群はトーラス

$$\mathbb{C}^n/C\qquad(C=\mathbb{Z}e_1+\cdots+\mathbb{Z}e_{2n})$$

である．ここで C は実 $2n$ 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の格子である．特にこのような群は必ずアーベル群である．

(c) 古典力学のアーノルド理論において[2]，「リウヴィルの定理」の主張は，「自由度 n の力学系において，もし互いに対合的な n 個の独立な第 1 積分 $I_1,\ldots,I_n$ があるなら（対合的とは，すべてのポアソン括弧式が 0 になる，つまり $[I_\alpha,I_\beta]=0$ を満たすということ），力学系は求積法によって積分することができる」というものである．このとき力学系は完全積分可能であると言われる．証明は，$2n$ 次元相空間の n 次元のレベル多様体

$$T_c:\ I_\alpha=c_\alpha\quad(\alpha=1,\ldots,n,\ c=(c_1,\ldots,c_n))$$

2 ［訳註］アーノルド [2] 第 10 章参照．

がトーラスになるという事実に基づいている．このことは，多様体 T_c の上で，関数 I_α が n 個のベクトル場を定めるということから直ちに得られる．そのベクトル場は，相空間上のシンプレクティック構造を使って，微分形式 dI_α によって与えられる．各ベクトル場は 1 パラメータ変換群 $U_\alpha(t)$ を定め，関係式 $[I_\alpha, I_\beta] = 0$ は変換 $U_\alpha(t_1)$ と $U_\beta(t_2)$ が可換であることを意味している．こうして，リー群 $\mathbb{R}^n$ の多様体 T_c 上の作用は，点 $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ が変換 $U_1(t_1)\cdots U_n(t_n)$ に対応するように与えられる．このことから，T_c が，ある点 $x_0 \in T_c$ の固定部分群 H による $\mathbb{R}^n$ の商群であることがわかる．T_c の次元が n であり，また（正定値形式である運動エネルギーがその上で定数だから）コンパクトであるので，$T_c = \mathbb{R}^n/H$ はトーラスである．こうして，力学系に対応する点の運動は常にあるトーラスの上で起こり，さらに，点がトーラスの 1 次元部分群の中を動くこと（これがいわゆる「作用角変数」の導入に対応している）を証明することができる．

非可換コンパクト・リー群の記述に移ろう．普通古典群と呼ばれる 3 つの群の系列（例 3, 4, 5）を述べる．この 3 つの群はそれぞれいろいろな形を持っているが，通常は行列の群である．行列群 G に対して，行列式が 1 である G の元の全体を SG と書く（S は special（特殊）の頭文字）．G と SG のその中心による商群を PG と PSG と書く（P は projective（射影）の頭文字）．

例 3. **直交群** $O(n)$ は，n 次元ユークリッド空間のすべての直交変換からなる．この群は，n 次元空間の単位球面 S^{n-1} の上に作用する．$e \in S^{n-1}$, $|e| = 1$ であれば，e の固定部分群は e に直交する超平面の上に作用し，$O(n-1)$ と同型になる．それゆえ，(1) から，$\dim O(n) = \dim O(n-1) + n - 1$ となり，したがって

$$\dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

となる．

群 $O(n)$ は連結ではない．指数 2 の重要な部分群があって，それは行列式が 1 の直交変換からなり，$SO(n)$ と書かれる．群 $SO(n)$ が連結であること

は容易に示される．$SO(n)$ の中心は，n が奇数なら E だけからなり，$n \geq 4$ が偶数なら E と $-E$ からなる．$SO(n)$ の中心による商群は，$PSO(n)$ と書かれる[3]．3 次元空間の回転群（例 1）はこの $SO(3)$ である．

群 $O(n)$ の自然な一般化は，任意の非退化な 2 次形式

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 \quad (p+q=n)$$

を考えることに関係している．この 2 次形式を保つ $\mathbb{R}^n$ の線形変換はリー群をなし，$O(p,q)$ と書かれる．この群は，$p=0$ か $q=0$ のときにのみコンパクトになる.（他の p,q の値の）群は後でまた扱うことにする.

例 4. **ユニタリ群** $U(n)$ は，n 次元エルミート複素ベクトル空間のユニタリ変換からなる．例 3 でのようにして $\dim U(n) = n^2$ であることがわかる．群 $U(n)$ は連結である．$U(n)$ の変換の行列式は絶対値 1 の複素数であり，行列式が 1 の変換は n^2-1 次元の部分群 $SU(n) \subset U(n)$ をなす．部分群 $SU(n)$ の中心は変換 εE, $\varepsilon^n = 1$ からなる．中心による商群は $PSU(n)$ と書かれる.

例 5. 四元数体上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{H}^n$ を考え（§8 例 5 参照），その上に $\mathbb{H}$ に値を持つスカラー積

$$((x_1, \ldots, x_n),\ (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \tag{2}$$

を定義しよう．ここで，$\overline{y_i}$ は共役四元数である．このスカラー積を保つ $\mathrm{Aut}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ に属する線形変換の群は**ユニタリ・シンプレクティック群**と呼ばれ，$SpU(n)$ と書かれる．$n=1$ のときは絶対値 1 の四元数 q の作る群になる．
一般の場合は

$$\dim SpU(n) = 2n^2 + n$$

となる.

異なる古典リー群の間にはある関係があって，それが有用であることも多い.

---

3 ［訳註］群の名前は記号のつけ方と同じように，この場合は，$SO(n)$ を特殊直交群，$PO(n)$ を射影直交群，$PSO(n)$ を射影特殊直交群と言うが，$SO(n)$ は回転群とも呼ばれる.

さて，定理 I は

$$SpU(1)/\{\pm 1\} \cong SO(3) \tag{3}$$

と書き換えられ，すでにわかっているように，これから $|\pi(SO(3))| = 2$ であることがわかる．

群 $SO(n)$ に対し，さらにすべての（一般には非コンパクトな）$SO(p,q)$ に対してさえ，同様な表示が，クリフォード代数（§8 例 10 参照）を使って得られる．

任意の四元数 q に対して，変換 $x \mapsto qxq^{-1}$ が純虚四元数の空間をそれ自身に写すという事実は，特に $n=3$ の場合に関係している．一般の場合は，

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 \qquad (p+q=n)$$

という計量を持つ，$\mathbb{R}$ 上の空間 L に対応するクリフォード代数 $C(L)$ を考える．$L \subset C(L)$ であった．可逆元 $a \in C^0(L)$ で $a^{-1}La \subset L$ を満たすもの全体の群 G を導入しよう．明らかに G は群である．$a \in G$ に対して，写像 $x \mapsto a^{-1}xa$ $(x \in L)$ が L の計量を保つことは容易に確かめられる．こうして準同型

$$f : G \to O(p,q)$$

が得られる．f の核が，$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ からなることは容易にわかる．(任意の直交変換が，鏡映の合成として表わすことができるというよく知られた事実を使って）f の像が $SO(p,q)$ であり，G の任意の元は，ある偶数 r に対して $a = c_1 \cdots c_r$, $c_i \in L$ の形に書くことができることを証明することができる．このことから，$a \mapsto a^*$ を代数 $C(L)$ の対合とすると（§8 例 10 参照），$a \in G$ に対して $aa^* \in \mathbb{R}$ となり，$aa^* = N(a)$ と置けば $a, b \in G$ に対して $N(ab) = N(a)N(b)$ となることがわかる．それゆえ，$N(a) = 1$ であるような元 $a \in G$ 全体は群をなす．これは**スピノル群**と呼ばれ，$\mathrm{Spin}(p,q)$ と書かれる．$q=0$ のときは $\mathrm{Spin}(n)$ と書かれる．群 $\mathrm{Spin}(p,q)$ が連結であることは容易にわかる．準同型 $f : \mathrm{Spin}(p,q) \to O(p,q)$ の核は $\{\pm E\}$ からなる．像は数 p, q に依存する．$q=0$ であれば，明らかに $O(p,q) = O(n)$ であり，さらに $f(\mathrm{Spin}(n)) = SO(n)$ であることが容易に確かめられる．すなわち

$$\mathrm{Spin}(n)/\{\pm 1\} \cong SO(n) \tag{4}$$

である．こうして，群 Spin(n) は群 $SO(n)$ の 2 重被覆である．帰納法を使って（$n=3$ を出発点とし），$\pi(SO(n))$ の位数が 1 か 2 であることが容易に示される．しかし，2 重被覆 Spin$(n) \to SO(n)$ を構成したことから，$|\pi(SO(n))| = 2$ であり，Spin(n) が単連結であることが示される．

$p>0$ かつ $q>0$ であれば，群 G にはノルムが正の元も負の元も存在し，それらの像が $SO(p,q)$ の 2 つの異なる成分を定める．ノルムが正の元の像は指数 2 の部分群 $SO^+(p,q) \subset SO(p,q)$ をなし，$f(\mathrm{Spin}(p,q)) = SO^+(p,q)$ である．つまり，

$$\mathrm{Spin}(p,q)/\{\pm 1\} \cong SO^+(p,q) \tag{5}$$

である．

§8 例 6 で見たように，任意の四元数は

$$q = z_1 + jz_2 \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \tag{6}$$

の形に書くことができる．ここで，$j^2=-1$, $zj = j\bar{z}$ である．(6) の形に書けば，$z \in \mathbb{C}$ を掛けるのを右から掛けることにすると，四元数は $\mathbb{C}$ 上の 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ となる．ここで左正則表現は，$\mathbb{C}^2$ の（$\mathbb{C}$ 上の）線形変換，つまり 2 次の行列による，四元数の表現を与えている．$\{1, j\}$ を基底とすると，四元数 (6) は行列 $\begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$ になる[4]．

(6) の形に四元数 q を書くと，絶対値は $\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ となる．それゆえ，絶対値 1 の四元数を掛けることにより，$|z_1|^2 + |z_2|^2$ という計量を持つ $\mathbb{C}^2$ のユニタリ変換が得られる．さらに，上の行列の行列式もまた $|z_1|^2 + |z_2|^2$ だから，今の場合，1 になる．だから，核が 1 の準同型

$$SpU(1) \to SU(2) \tag{7}$$

が得られている．次元の考察と群 $SU(2)$ の連結性とから，これが同型で，し

---

4 ［訳註］(6) の対応で $\mathbb{H}$ と $\mathbb{C}^2$ を対応させ，$q = z_1 + jz_2 \leftrightarrow {}^t(z_1, z_2)$, $r = w_1 + jw_2 \leftrightarrow {}^t(w_1, w_2)$ とする．そのとき，

$$\begin{aligned} qr &= (z_1 + jz_2)(w_1 + jw_2) = z_1 w_1 - \overline{z_2} w_2 + j(\overline{z_1} w_2 + z_2 w_1) \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 w_1 - \overline{z_2} w_2 \\ \overline{z_1} w_2 + z_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．

たがって群 $SU(2)$ が絶対値 1 の四元数の群と同型であることがわかる．(3) と (7) を合わせると，同型

$$SO(3) = SU(2)/\{\pm 1\} \tag{8}$$

が得られる．これを初等的に説明すると次のようになる．トレースが 0 の 2 次のエルミート行列の集合 L を考える．群 $SU(2)$ がこの上に $A \mapsto UAU^{-1}$, $U \in SU(2)$ という規則で作用する．$A \in L$ に対して $|A|^2 = -\det A$ として L に計量を導入すると，L は 3 次元ユークリッド空間になる．$U \in SU(2)$ に対応する変換は，そこでの変換 $\gamma \in SO(3)$ を定める．これが準同型

$$SU(2) \to SO(3)$$

である．

$\mathcal{L}$ を四元数の作る実 4 次元のベクトル空間で，絶対値によって計量を考えたものとする．群 $SpU(1) \times SpU(1)$ の $\mathcal{L}$ 上の作用を

$$(q_1, q_2)(x) = q_1 x q_2^{-1} \qquad (x \in \mathcal{L}) \tag{9}$$

と定める．自明に作用するのが対 $(1,1)$ と $(-1,-1)$ だけであることは容易にわかる．この変換は明らかに絶対値を保ち，それゆえ直交変換である．変換 (9) の行列式は $|q_1| \cdot |q_2|^{-1}$ であり，今の場合 1 である．準同型

$$SpU(1) \times SpU(1) \to SO(4)$$

が得られ，その核もわかっている．連結性と次元の考察から，像は $SO(4)$ 全体であり，同型

$$SO(4) \cong (SpU(1) \times SpU(1))/H \tag{10}$$

が得られる．ここで，H は中心の位数 2 の部分群である．ちなみに，群 $SpU(1) \times SpU(1)$ の中心全体は，$SpU(1)$ の中心である位数 2 の群 2 つの積である．(10) の左辺の $SO(4)$ の中心による商群をとれば，右辺では $SpU(1) \times SpU(1)$ を中心全体で割らなければならない．しかし，$SpU(1)$ の中心による商群は $SO(3)$ である．したがって

$$PSO(4) \cong SO(3) \times SO(3) \tag{11}$$

となる．

B. 複素解析的リー群

以下の例 6, 7, 8 で与えた 3 系列の複素リー群も，**古典群**と呼ばれている．

例 6. **一般線形群** $GL(n, \mathbb{C})$ は，複素 n 次元ベクトル空間の非退化な線形変換の作る群である．群 $GL(n, \mathbb{C})$ の（複素解析的多様体としての）次元は明らかに n^2 である．行列式が 1 の線形変換のなす部分群 $SL(n, \mathbb{C})$ を含んでいる．群 $GL(n, \mathbb{C})$ の中心はスカラー行列（単位行列のスカラー倍）からなり，$GL(n, \mathbb{C})$ の中心による商群は $PGL(n, \mathbb{C})$ と書かれる．

例 7. ある非退化な 2 次形式（座標系を適当に選べば $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ と書かれる）を保つ変換からなる群 $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群は $O(n, \mathbb{C})$ と書かれ，**直交群**と呼ばれる．複素解析多様体としての次元は $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ である．

例 8. ある非退化な歪対称形式（座標系を適当に選べば

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i)$$

と書かれるもの）を保つ変換からなる $GL(2n, \mathbb{C})$ の部分群は**シンプレクティック群**と呼ばれ，$Sp(2n, \mathbb{C})$ と書かれる．

複素古典群とコンパクトな古典群には密接な関係がある．このことのもっとも簡単な例は，円周の群 S^1 を絶対値が 1 の複素数の作る部分群 $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ と考えることである．つまり，

$$S^1 = SU(1) \subset GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$$

である．もっと一般には，この関係は以下のようなものである．明らかに $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ である．$U(n)$ が $GL(n, \mathbb{C})$ の**極大コンパクト部分群**であること，つまり，より大きなコンパクト部分群には含まれないことを証明することができる．群 $GL(n, \mathbb{C})$ の他のどんなコンパクト部分群も，$U(n)$ のある部分群に共役になる．この理由は§17B で説明する．同じように，群 $O(n) \subset O(n, \mathbb{C})$ は極大コンパクト部分群で，$O(n, \mathbb{C})$ のどんなコンパクト部分群も $O(n)$ の

ある部分群に共役である．シンプレクティック群に対して類似の結果を得るために，$\mathbb{C}$ 上の 2 次元空間 $\mathbb{H}=\mathbb{C}+j\mathbb{C}$ としての四元数の表示 (6) を使う．すると，ベクトル $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{H}^n$ は $(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1},\ldots,z_{2n})$ と書かれる．ここで，$z_i\in\mathbb{C}$ であり $x_k=z_k+jz_{n+k}$ である．この座標では，例 5 のスカラー積 (2) は

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w_i}+j\sum_{i=1}^{n}(z_iw_{i+n}-w_iz_{i+n})$$

の形になることが容易に確かめられる（ここで，$y=(y_1,\ldots,y_n)$ かつ $y_k=w_k+jw_{k+n}$ である）[5]．こうして，$(x,y)=\alpha+j\beta$ であれば，α は複素ベクトル x,y のエルミート·スカラー積であり，β は歪対称形式 $\sum_{i=1}^{n}(z_iw_{i+n}-w_iz_{i+n})$ の値を持つ．$\mathbb{H}^n$ のあらゆる $\mathbb{H}$ 線形変換 φ は $\mathbb{C}^{2n}$ の $\mathbb{C}$ 線形変換として書くことができ，上に述べたことから，$\varphi\in SpU(n)$ という条件は $\varphi\in U(2n)$ かつ $\varphi\in Sp(2n,\mathbb{C})$ であることを意味する．こうして

$$SpU(n)=U(2n)\cap Sp(2n,\mathbb{C})$$

となる．特に，$SpU(n)$ は $Sp(2n,\mathbb{C})$ の部分群である．これは極大コンパクト部分群であって，$Sp(2n,\mathbb{C})$ のどんなコンパクト部分群も $SpU(n)$ の部分群に共役である．

この 3 つの場合ではすべて，複素群の（複素解析多様体としての）次元は，

---

5 ［訳註］(x,y) に対する式は間違っている．上の設定で計算すると，この式は

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}=\sum_{i=1}^{n}(z_i\overline{w_i}+w_{i+n}\overline{z_{i+n}})-j\sum_{i=1}^{n}(z_{i+n}\overline{w_i}-\overline{z_i}w_{i+n})$$

となる．しかし，以下で欲するように $\mathbb{H}$ 線形変換を $\mathbb{C}$ 線形だと思うということは，単に $\mathbb{H}$ の構造を少し忘れるということでなければならず，$\mathbb{H}$ 行列が左から掛かっているので，$\mathbb{C}$ 行列も左から掛かっていなければならない．(6) のようにすると，$\mathbb{H}$ の作用と $\mathbb{C}$ の作用が可換になって具合がよいようだが，今の目的には合わないのである．

同型 $\mathbb{H}\cong\mathbb{C}$ で，$q\leftrightarrow(z_1,z_2)$ と対応していて，$w\in\mathbb{C}$ に対して $wq\leftrightarrow(wz_1,wz_2)$ となっていて欲しければ，q は (6) の形ではなく，$q=z_1+z_2j=z_1+j\overline{z_2}$ と置けばよい．

すると，ベクトルの対応は $x_k=z_k+z_{n+k}j$ と置くことになり，$\overline{x_k}=\overline{z_k}-z_{n+k}j$ であることに注意して計算すれば，

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(z_i\overline{w_i}+z_{i+n}\overline{w_{i+n}})-\sum_{i=1}^{n}(z_iw_{i+n}-w_iz_{i+n})j$$

が得られる．$(x,y)=\alpha+\beta j$ とすれば，以下の議論もそのまま成り立つ．

コンパクト部分群の（微分可能多様体としての）次元に等しい.

最後に，低次元の重要なリー群をいくつか述べておく.

群 $O(3,1)$ はローレンツ群と呼ばれ，$SO(3,1)$ は正格ローレンツ群と呼ばれる．x_1, x_2, x_3 を空間座標，x_0 を時間と解釈すれば，形式 $f = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ を保つことは光の速さ（1 に等しいと考えている）を保つことと同値である．この同じ群を別の，それもまた重要な解釈をすることができる．x_0, x_1, x_2, x_3 を，3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ の斉次座標と考える．方程式 $f = 0$ は $\mathbb{P}^3$ の 2 次曲面を定義し，これは非斉次座標 $y_i = x_i/x_0$ $(i = 1, 2, 3)$ では $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ と書くことができる．つまりこれは球面 $S \subset \mathbb{P}^3$ である．斉次座標で考えれば，$O(3,1)$ の変換は S を保つ $\mathbb{P}^3$ の射影変換になる．もちろん，すべての座標を -1 倍することは $\mathbb{P}^3$ の恒等変換になり，それゆえ $PO(3,1)$ は $\mathbb{P}^3$ の上に作用する．明らかに，この群は球面 S の内部も保つ．しかし，非ユークリッド幾何学のケイリー–クライン・モデルでよく知られているように，3 次元ロバチェフスキー空間はまさに球面の内部の点として表わされ，その運動は球面を保つ射影変換によって表わされる．こうして次の定理が得られる．

定理 II. **群 $PO(3,1)$ は 3 次元ロバチェフスキー空間の運動全体の群と同型であり，$PSO(3,1)$ は正格な（向きづけを保つ）運動全体の群と同型である．**

もちろんこの主張は一般的な性格のものであって，群 $PO(n,1)$ は n 次元ロバチェフスキー空間の運動全体の群と同型である．

ローレンツ群 $O(3,1)$ にはもう 1 つの重要な解釈がある．それはスピノル群 $\mathrm{Spin}(3,1)$（(5) 参照）を考えることに基づいている．この群を構成する際，$a \in G$ に対してノルムが $N(a) = aa^* \in \mathbb{R}$ となることを知っている．しかしこの特殊な場合では，これは十分条件でもある．すなわち，$aa^* = \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ であれば，$a^{-1}\mathcal{L}a \subset \mathcal{L}$ となり，つまり $\alpha \in G$ となる．実際，$\alpha^* = \alpha$ から $a^{-1} = \alpha^{-1}a^*$ となり，このことから $x \in \mathcal{L}$ に対して $(a^{-1}xa)^* = a^{-1}xa$ となる．一方，$a^{-1}xa \in C^1$ であり，C^1 は e_i や積 $e_ie_je_k$ の形の元の 1 次結合からなっている．ここで，e_i たちが $\mathcal{L}$ の直交基底をなすとする．こ

れらの中で，e_i たちの 1 次結合だけが $x \mapsto x^*$ のもとで符号を変えないので，$a^{-1}xa \in \mathcal{L}$ である．ここで，代数 C^0 の行列代数としての具体的な表示を求めることができるという事実（§8 例 11 と §10 例 6 参照）を使おう．e_0, e_1, e_2, e_3 をその基底で，f が $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ の形になるようにとれば，$1, e_0e_1, e_0e_2, e_1e_3$ が代数 $M_2(\mathbb{C})$ を生成し，$1, e_0e_1e_2e_3$ が代数 $\mathbb{C}$ を生成し，C^0 全体が $M_2(\mathbb{C})$ と同型になる．この同型で，対合 $a \mapsto a^*$ が写像

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

に対応し，$aa^* = \det A$ であることが，容易に確かめられる．それゆえ，$\mathrm{Spin}(3,1)$ は $SL(2,\mathbb{C})$ に同型で，

$$SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1)$$

という準同型が得られる．その像は $SO^+(3,1)$ で，核は $\{\pm 1\}$ である．こうして

$$PSL(2,\mathbb{C}) \cong SO^+(3,1)$$

が得られる．

準同型 $SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1)$ には，次のような初等的な解釈がある．2 次のエルミート行列の空間 L と，群 $SL(2,\mathbb{C})$ の L 上の作用 $A \mapsto CAC^*$ $(A \in L, C \in SL(2,\mathbb{C}))$ を考える．L に計量 $|A|^2 = -\det A$ を導入する．これはある基底で $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ の形になる．したがって，上に述べた群 $SL(2,\mathbb{C})$ の作用は準同型 $SL(2,\mathbb{C}) \to O(3,1)$ を定める．これは上の準同型 $SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1)$ と同じものである．

ここで，リー群，離散群，有限群の興味深い例を一度に与える群のクラスを考えよう．

C. 代数群

この中から，**代数的行列群**[6]という 1 つのタイプだけを述べる．これらは任意の体 K 上で，K に係数を持つ代数方程式によって与えられる群 $GL(n,K)$

[6] ［訳註］英語文献では**線形代数群** (linear algebraic group) と呼ばれることが多い．

の部分群として定義することができる[7]. この例には, $SL(n,K)$, K に係数を持つある 2 次形式 f に対して f を保つ行列の群である $O(f,K)$, $Sp(2n,K)$, 上三角行列の群 (a_{ij})（$i<j$ のとき $a_{ij}=0$ かつ $a_{ii}\neq 0$）, とさらに $a_{ii}=1$ を満たすこの部分群がある. 特に, $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の形の 2 次の行列全体の群は, 加法群と考えた体 K と同型であり, これを $\mathbb{G}_a$ と書く. 群 $GL(1,K)$ は, 乗法群と考えた $K^*=K\setminus\{0\}$ と同型であり, これを $\mathbb{G}_m$ と書く. 体 K が $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ に含まれれば, G は K 上定義された代数群であり, G に属する実行列または複素行列は実リー群 $G(\mathbb{R})$ または複素解析的リー群 $G(\mathbb{C})$ を定義する. これまで考察したリー群の大半はこの型のものである. しかし一般概念はもっと柔軟なもので, たとえば有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の代数群を考えることもできる. 群 $O(f,\mathbb{Q})$ の考察は, 有理 2 次形式 f の算術的性質を研究する群論的な方法を与える. さらに, 体 $\mathbb{Q}$ 上定義された代数的行列群 G に属する, 整数を成分とし ± 1 の行列式を持つ行列を考えると, リー群 $G(\mathbb{R})$ の離散部分群 $G(\mathbb{Z})$ が得られる. 群 $G=SL(n),O(f),Sp(n)$ に対しては, 商空間 $G(\mathbb{Z})\backslash G(\mathbb{R})$ はコンパクトであるか（群 $G(\mathbb{R})$ の不変測度で定義された測度に関して）有限の体積を持つ. たとえば, §14 例 3a–5 を参照. この形の群とその有限指数の部分群を**数論的群**と呼ぶ.（この概念を自然に一般化するには, 任意の代数的数体を体 $\mathbb{Q}$ と一緒に考える必要が起きてくる.）

最後に, $GL(n),O(f),Sp(n)$ のような代数群は有限体上でも考えることができ, 有限群の興味深い例を与えてくれる. 群 $GL(n,\mathbb{F}_q)$ はすでに §13 例 9 に出てきている.

さらにまったく予期しない仕方で, 行列群と関わって離散群が現れてくる. 行列群 G が有理数体 ($K=\mathbb{Q}$) 上定義されていれば, その有理点のなす群 $G(\mathbb{Q})$, 実点のなす群 $G(\mathbb{R})$, p 進点のなす群 $G(\mathbb{Q}_p)$（§7 の最後を参照）を考えることができる. 体 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}_p$ を同等に取り扱う最も不変的な方法は, $G(\mathbb{R})$ とすべての $G(\mathbb{Q}_p)$ の「無限積」を考えることである. この積の厳密な定義は与えないが, これは群 G の**アデール群**と呼ばれ, $G_{\mathbb{A}}$ と書かれる. $G(\mathbb{Q})\subset G(\mathbb{R})$

---

7 ［訳註］この辺り, あまり厳密な数学的記述とは考えず, 大らかな気持ちでいた方がよい. このままでは以下の記述の中で矛盾が生じる. 矛盾を起こさないようにしようと思えば, 群 $GL(n,K)$ の代わりに, $\bar{K}$ を体 K を含む代数的閉体として, 群 $GL(n,\bar{K})$ の部分群と考えるのが 1 つの方法である.

かつすべての p に対して $G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{Q}_p)$ であるから，$G(\mathbb{Q}) \subset G_{\mathbb{A}}$（「対角的な」埋め込み）となり，$G(\mathbb{Q})$ は $G_{\mathbb{A}}$ の離散部分群になることがわかる．有理数を成分とする行列が離散部分群を作るということは非常に馴染みにくいが，すべての数の加法群 $G = \mathbb{G}_a$ を例として考えると，原理は容易に理解されるだろう．$x \in G(\mathbb{Q})$ が有理数なら，すべての p に対して $\varphi_p(x) \leq 1$ という条件は（付値 φ_p の定義は §7 を参照），x が整数であることを意味し，そして $\varphi_{\mathbb{R}}(x) < 1$ であれば $x = 0$ となる.（たとえば $G = SL(n), O(f), Sp(n)$ のような）多くの場合，商空間 $G(\mathbb{Q})\backslash G_{\mathbb{A}}$ の体積は有限である．この体積が群 G だけで一意的に決まることを示すことができる．この体積が，いわゆる G の玉河数 $\tau(G)$ であり，非常に重要な数論的不変量である．たとえば，f が有理係数の正定値 2 次形式であれば，ミンコフスキー–ハッセの定理（§7 定理 IV）から，有理数 x, a に対する方程式 $f(x) = a$ に解があることと，$\mathbb{R}$ で可解であり（つまり $a > 0$）かつすべての $\mathbb{Q}_p$ で可解である（つまり，合同式 $f(x) \equiv a \pmod{p^n}$ がすべて可解である）こととが同値であることが導かれる．しかし，これらの条件が満たされたなら，整数解の数を，合同式 $f(x) \equiv a \pmod{p^n}$ の解の数を使って数的に特徴付けることができる．これは玉河数 $\tau(G)$，$G = O(f)$ を求めることと同値であることがわかる.（この玉河数は 2 であるが，それは $|\pi(SO(n))| = 2$ という事実の反映である.）

§ 16.　群論の一般的な結果

理想的には,「抽象的な」群論とは，同型を除いたすべての群の記述であって，群の具体的な実現にはまったく関係のないものである．それほど一般的な問題というものは，もちろんまったく現実的ではない．より具体的な問題には（それでも非常に広いけれど）有限群の分類問題がある．有限個の元から作られるケイリーの表（乗積表）は有限個しかあり得ないので，与えられた位数の同型でない群は有限個しかない．理想としては，与えられた位数のすべての有限群を与える規則を知りたいと思うだろう．位数があまり大きくなければそれも難しいことではないので，出てくる群を挙げてみよう．

有限アーベル群に対しては，主イデアル環上の有限生成加群に関する基本定理（§5 例 6 と §6 定理 II 参照）から，答が得られることを思い出しておこう．有限アーベル群は（加法的に書くと），素数 p に対する群 $\mathbb{Z}/(p^k)$ の直和の形に表わすことができ，その表し方は一意的である．したがって，困難が起こるとすれば，非可換な群でだけである．

例 1. 位数 ≤ 10 のすべての群を，同型を除いて挙げておく．

$$|G| = 2,\quad G \cong \mathbb{Z}/(2),$$

$$|G| = 3,\quad G \cong \mathbb{Z}/(3),$$

$$|G| = 4,\quad G \cong \mathbb{Z}/(4) \text{ または } \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)^{1},$$

$$|G| = 5,\quad G \cong \mathbb{Z}/(5).$$

$|G| = 6$ になって初めて非可換な群が現れる．それは $\mathfrak{S}_3$（もしくは正三角形の対称群）に同型な群であり，定義関係式は §12 の (6) 式と (7) 式で与えられている．こうして，

[1] ［訳註］クラインの四元群とも言う．2 つの元 s, t で生成され，$s^2 = e$, $t^2 = e$, $st = ts$ を定義方程式とする群である．

$$|G|=6,\quad G\cong\mathfrak{S}_3 \text{ または } \mathbb{Z}/(2)\oplus\mathbb{Z}/(3),$$
$$|G|=7,\quad G\cong\mathbb{Z}/(7)$$

となる．

$|G|=8$ では，同型でない非可換な群がすでに 2 つもある．1 つは正方形の対称群 D_4，つまり，2 つの元 s,t で生成され，$s^2=e$, $t^4=e$, $(st)^2=e$ を定義方程式とする群である（ここで，s はある中線に関する鏡映で，t は $90°$ の回転である）．もう 1 つの非可換な群 H_8 は四元数体の言葉で述べることができる．$1,i,j,k,-1,-i,-j,-k$ からなり，積は四元数として考えたものである（§8 例 5 参照）．こうして

$$|G|=8,\quad G\cong D_4,\ H_8,\ \mathbb{Z}/(8),\ \mathbb{Z}/(4)\oplus\mathbb{Z}/(2),\ (\mathbb{Z}/(2))^{\oplus 3},$$
$$|G|=9,\quad G\cong\mathbb{Z}/(9),\ \mathbb{Z}/(3)\oplus\mathbb{Z}/(3)$$

となる．

$|G|=10$ ではまた非可換な群が現れる．それは正 5 角形の対称群 D_5 と同型で，s,t によって生成され，$s^2=e$, $t^5=e$, $(st)^2=e$ を定義方程式としている（s はある軸に関する鏡映で，t は角 $2\pi/5$ の回転である）．こうして

$$|G|=10,\quad G\cong D_5,\ \mathbb{Z}/(5)\oplus\mathbb{Z}/(2)$$

となる．

位数 ≤ 32 までの群の数の表を挙げておこう．

$\lvert G\rvert$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
群の数	1	1	2	1	2	1	5	2	2	1	5	1	2	1	14	1

$\lvert G\rvert$	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
群の数	5	1	5	2	2	1	15	2	2	5	4	1	4	1	51

もちろん実際には，有限群の構造の研究には，位数だけを使うのではなく，他のもっと細かい不変量も使うし，またより簡単な群から複雑な群を作る方法も使う．

群の一般概念に戻り，群を作る基本的な方法を述べる．その 1 つである直

積はすでに使ったことがある．個数が2つのアナロジーとして，任意有限個の群 $G_1, \ldots, G_m$ の直積 $G_1 \times \cdots \times G_m$ を定義する．これは列 $(g_1, \ldots, g_m)$, $g_i \in G_i$ からなり，積は成分ごとの積で定義するものとする．群 G_i は，$g \in G_i$ を i 番目が g である列 $(e, \ldots, g, \ldots, e)$ と同一視することによって，積 $G_1 \times \cdots \times G_m$ の部分群とみなすことができる．すると G_i は $G_1 \times \cdots \times G_m$ の正規部分群で，それらは群全体を生成し，$G_i \cap (G_1 \times \cdots \times G_{i-1} \times e \times G_{i+1} \times \cdots \times G_m) = e$ を満たす．逆に，群 G が正規部分群 $G_1, \ldots, G_m$ で生成され，$G_i \cap (G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_m) = e$ という性質を満たせば，G は直積 $G_1 \times \cdots \times G_m$ に同型であることを示すのは難しくない．

有限アーベル群では，そして有限生成アーベル群においても，直積は，これらの群の完全な分類を与えるのに十分なほど強力な構成法であることを見てきた．しかしながらこのためには，分類定理に出てくる直和分解が一意的であること（§6 定理 II 参照）が本質的である．非可換な群に対しても，それ以上は分解できないような直積への分解が一意的かどうかというのは，自然な問題である．ほとんどの応用ではそれで十分だが，最も簡単な場合に，この答を与えよう．加群とのアナロジーによって，群 G の部分群の鎖

$$G \supseteq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \cdots \supsetneq H_k \tag{1}$$

を考える．このようなすべての鎖の長さが有界ならば，G は長さ有限の群と言う．有限群はこの種の群である．G がリー群や代数群なら，H_i が連結閉リー部分群や代数的部分群である鎖 (1) を考えるように定義するのが自然である．すると，鎖 (1) の部分群の次元は減少せねばならず，鎖の長さは群 G の次元で抑えられる．

定理 I. ウェダーバーン–レマク–シュミットの定理[2]．長さ有限の群は，それ以上は分解できないような，正規部分群の直積としての分解をただ 1 つ持つ．厳密に言えば，そのような任意の 2 つの分解は同じ個数の因子群を持たねばならず，因子群もそれぞれ同型でなければならない．

[2] ［訳註］有限群に対してウェダーバーンによって述べられ，レマクとシュミットによって証明され，クルルによって一般化されたので，「クルル–レマク–シュミットの定理」と呼ばれることもある．

しかしながら，非可換な群が（たとえば有限群でもリー群でも）直積に分解されるのは，例外的な場合だけである．大半の場合は分解することができない．群をより簡単な部分に帰着する，より普遍的な方法が準同型の概念によって与えられる．もし $G' = G/N$ ならば，準同型 $G \to G'$ によって，つまり，G を「N の元を除いて」考えることで，G' を群 G の一種の単純化とみなすことができるようになる．さて，どのような最終的な自明でない極限にまで，群を「単純化」していくことができるのだろうか？　群準同型 $G' \to G''$ を考え，またさらに，と考えることができる．G が有限の長さを持つなら，このプロセスは停止せざるをえず，それは，自明でない準同型を持たない群 $\bar{G}$ に至ったときに起こる．この群 $\bar{G}$ には，$\{e\}$ か $\bar{G}$ 自身以外に正規部分群がないということである．

$\{e\}$ と G 自身以外に正規部分群を持たない群 G を**単純群**と言う．リー群の場合には，リー部分群である連結正規部分群について言うのが自然だし，代数群の場合には代数的部分群について言うのが自然である．すると，この定義で単純なリー群も，離散的な正規部分群を持つことがあり，抽象群としては単純群でないこともあり得る．部分群 $\mathbb{Z}$ を含む群 $\mathbb{R}$ はこの例になっている．すでに見たように，長さ有限の任意の群にはある単純群への準同型がある．$G \to G'$ をそのような準同型とし，N_1 をその核とする．今度は，N_1 に対して同じ構成を行うことは自然である．単純群 G'' への準同型 $N_1 \to G''$ が得られ，その核 N_2 は N_1 の正規部分群である（必ずしも G の正規部分群ではない）．この手続きを続けていくと，鎖

$$G = N_0 \rhd N_1 \rhd \cdots \rhd N_k \rhd N_{k+1} = \{e\}$$

で，商群 N_i/N_{i+1} が単純群であるものが得られる．この鎖を G に対する**組成列**と呼び，商群 N_i/N_{i+1} をこの組成列の**商**と言う．1 つの群が異なる組成列を持つこともあり得るので，次の定理は非常に重要である．

定理 II．ジョルダン–ヘルダーの定理．1 つの群に 2 つの組成列があるとき，その長さは同じで，それぞれには商が同型になる対がある（が，現れる順序は異なるかも知れない）．

ジョルダン–ヘルダーの定理とウェダーバーン–レマク–シュミットの定理の

証明には，群としての性質はあまり使わない．証明で基本的なことは次の補題である．

補題． H が群 G の部分群で，N が G の正規部分群であれば，$H \cap N$ は群 H の正規部分群で，

$$H/H \cap N \cong HN/N \tag{2}$$

となる．ここで HN は $hn\,(h \in H, n \in N)$ の形の積全体で，群 G の部分群である．

実際，準同型 $f : G \to G/N$ を考える．f を H に制限すると準同型 $f_1 : H \to G/N$ が得られ，その核は $H \cap N$ であり，像は $H_1 \cong H/H \cap N$ である．f による H_1 の原像は HN であり，それゆえ $H_1 \cong HN/N$ となり，これから (2) が得られる．

双方の定理の証明は，次のようなアイデアに基づいている．それは，H と N をいろいろに選んで対 $(H, H \cap N)$ を対 (HN, N) で置き換えることにより，群の直既約部分群[3]の直積としての1つの分解から他の分解へ，つまり1つの組成列から他の組成列へ移ることができる，というものである．本質的にはこの議論は，群 G の部分群の作る半順序集合の性質だけを使い，この形に定式化することができる．このように理解することは役に立つもので，有限の長さの加群に対しても応用でき，この2つの定理のアナロジーが成り立つ（§9 定理 II 参照）．

こうして，群（有限群，リー群，代数群）を記述する問題は，次の2つの問題に帰着する．

(1) 与えられた群の集合をある組成列の商とする群はどんなものか？

(2) どのような群が組成列の商になり得るか？

最初の問題は帰納的に調べることができて，「与えられた群 N と F に対して，N と同型な正規部分群を持ち，それによる商群が F と同型な群 G のすべてを記述せよ」という問題に行き着く．このとき群 G を，F の N による拡大と言う．たとえば，結晶群 G（§14 例2参照）は F の A による拡大の

---

3 ［訳註］$\{e\}$ と異なる2つの部分群の直積として表わすことができない群を直既約群と言う．著者は，「それ以上分解できないような部分群の直積への群の分解」という言葉遣いをしている．

形をしている．ここで，A はある格子 C のベクトルによる平行移動で，G に含まれるもののなす群であり，F は C の対称群である．

こんなに一般的な形では，問題に完全な解答などありそうにもないが，具体的な状況下では，多少とも満足の行く描像が描けるようないくつかのアプローチが知られている（これに関しては§21 例 4 参照）．

上の定式化では，第 2 の問題の方が遥かに興味をそそられるものである．組成列の商は単純群であり，また単純群の任意の集合はある群の組成列の商であるから（たとえばそれらの直積をとればよい），この問題は次の問題と同等である．

単純群とはどんなものか？

現在では，有限群，リー群，代数群といった最も重要なタイプの群に対してはこの答は知られている．

最初に単純群であることが証明できる群の例を述べよう（たとえ原理的には複雑でない議論であっても，この証明は普通かなり面倒なものである）．

自明なことに思えるかも知れないが，多くの応用のある**単純アーベル群**の場合から始めよう．抽象的な群の理論の観点からは答は明らかで，単純アーベル群は位数が素数の巡回群に他ならない．リー群の理論では，単純群の定義をする際，連結な正規部分群だけを考えた．それゆえ，連結で微分可能なリー群の理論では，実数の加法群 $\mathbb{R}$ と円周群 S^1 という，さらに 2 つの例がつけ加わる．複素解析的リー群に対しては，少し複雑になるので，答を与えることはやめる．

代数的閉体の上の代数的行列群に対しても同じように 2 つの例，つまり，基礎体の元の作る加法群 $\mathbb{G}_a$ と乗法群 $\mathbb{G}_m$ がある．

単純アーベル群はこのように乏しい位しかないが，上に述べたアイデアのようにして組成列の商として使えば，極めて広範な群のクラスが得られる．商がアーベル群である組成列を持つ群を**可解群**と言う．

次の性質は容易に確かめられる．

定理 III.　可解群の部分群や準同型像はまた可解である．

可解な正規部分群を持ち，それによる商群が可解な群は可解である．

可解群には，正規部分群で，それによる商群がアーベル群となるものがある．つまりあるアーベル群への自明でない準同型が存在する．

任意の群 G に対して，アーベル群への準同型 $f:G \to A$ の核のすべての共通部分を G の**交換子群**と言い，G' と書く．

明らかに，任意の元 $g_1, g_2 \in G$ に対して，積 g_1g_2 と g_2g_1 は，アーベル群へのどんな準同型によっても同じ元に写るので，$g_1g_2(g_2g_1)^{-1} = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ は単位元に写る．$g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ の形の元を**交換子**と言う．すべての交換子は交換子群 G' に含まれることがわかり，交換子たちが G' を生成することを証明するのは難しくない．したがって，

$$G' = \langle g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} \mid g_1, g_2 \in G \rangle$$

となる．

G が可解群なら，$G' \neq G$ である（$G \neq \{e\}$ であるかぎり）．しかし，可解群の部分群として G' はまた可解群であり，それゆえ $G' = \{e\}$ であるか $G'' = (G')' \neq G'$ である．この手続きを繰り返していけば，可解群の交換子群を次々ととっていくことにより，いつかは $\{e\}$ に到達することがわかる．(つまり，$G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ とおけば，ある n に対して $G^{(n)} = \{e\}$ となる.) この特徴がまた，長さ有限の群が可解であるための十分条件でもあることが容易にわかる．アーベル群は，すでに $G' = \{e\}$ ということによって特徴付けられる．この意味で，可解群はアーベル群の自然な一般化である．

例 2. これまでに扱った有限群の中では,（アーベル群の他では）以下のものが可解な群である．

群 $\mathfrak{S}_3$ ．組成列は $\mathfrak{S}_3 \supset \mathfrak{A}_3 \supset \{e\}$ である．

群 $\mathfrak{S}_4$ ．組成列は $\mathfrak{S}_4 \supset \mathfrak{A}_4 \supset \mathfrak{B}_4 \supset \{e\}$ である．ここで $\mathfrak{B}_4$ は e と，巡回型が $(2,2)$ のすべての置換からなる部分群である．

群 $GL(2, \mathbb{F}_2)$ と $GL(2, \mathbb{F}_3)$ ．

有限群は，その位数が素数 p のベキであるとき，p 群と言う．

定理 IV. **有限 p 群は可解である．**

実際，G のそれ自身の上の随伴作用を考えると，その軌道は G の元の共役類で，それを $C_1, \ldots, C_h$ とする．C_i の元の個数を k_i する．すでに知っているように（§12 の (10) 式参照），$|G| = k_1 + \cdots + k_h$，$k_i = (G : S_i)$ となる．ここで，S_i はある元 $g_i \in C_i$ の固定部分群である．固定部分群 S_i は G の部分群だから，$(G : S_i)$ は G の位数の約数であり，それゆえ p のベキである．特に，$k_i = 1$ となるのは，C_i が G の中心に含まれる 1 つの元からなるときかつそのときだけである．等式 $|G| = k_1 + \cdots + k_h$ の左辺は p のベキであり，右辺は（1 かも知れない）p のベキである項の和である．このことから，1 であるような k_i の個数は p の倍数であることがわかる．これは，**有限 p 群は自明でない中心 Z を持つ**ことを意味している．Z はアーベル群だから可解であり，帰納法により，商群 G/Z もまた可解であると仮定することができる．それゆえ G は可解である．

可解リー群の例をいくつか挙げる．

例 3. 群 $E(2)$ はユークリッド平面のすべての向きづけを保つ運動の群であり，その組成列は $E(2) \supset T \supset T' \supset \{e\}$ である．ここで，T は平行移動全体の群であり，T' はある与えられた方向の平行移動全体の部分群である．組成列の商は，

$$E(2)/T \cong SO(1) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad T/T' \cong \mathbb{R}, \quad T' \cong \mathbb{R}$$

である．

例 4. a_{ij} がある体 K に属すような

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0)$$

の形の上三角行列全体の群．これは代数群である．$K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ のときはリー群になり，有限体 K に対しては有限群になる．

さて単純群の構造についての元々の問題に戻り，今度は「非可換単純群」という自明でない場合に制限して考えることにする．完全に任意の群に対して

なら，もちろん，この問題に厳密な解答はない．これまでに考察したことのある非可換な群で，単純群だとわかっているものを挙げよう．

定理 V. 次の系列の群は単純群である．

(a) 有限群．

交代群 $\mathfrak{A}_n$，ただし $n \geq 5$ のとき．

$PSL(n, \mathbb{F}_q)$，ただし $n = 2$ かつ $q = 2, 3$ のときを除く．

(b) コンパクト古典リー群．$\mathcal{C}omp$．

$SU(n)$，ただし $n > 1$ のとき．

$SO(n)$，ただし $n \neq 1, 2, 4$ のとき．

$SpU(n)$，ただし $n \geq 1$ のとき．

(c) 複素解析的古典リー群 $\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}$．

$SL(n, \mathbb{C})$，ただし $n > 1$ のとき．

$SO(n, \mathbb{C})$，ただし $n \neq 1, 2, 4$ のとき．

$Sp(2n, \mathbb{C})$，ただし $n \geq 1$ のとき．

(d) （任意の代数的閉体 K 上の）代数的古典行列群 $\mathcal{A}lg_K$．

$SL(n, K)$，ただし $n > 1$ のとき．

$SO(n, K)$，ただし $n \neq 1, 2, 4$ のとき．

$Sp(n, K)$，ただし $n \geq 1$ のとき．

すでに考察したように，(b), (c), (d) の系列の群は，抽象群としては単純群ではない．それらは自明でない中心 Z を持つ．そして $Z_0 \subset Z$ が上に挙げた群 G の 1 つの中心に含まれる部分群であれば，G/Z_0 もまた上の定義の意味で単純群である．たとえば，$PSU(n) = SU(n)/Z_0$，$Z = Z_0$ である．以下ではさらには断らないで，これらの自明な修正も同じ系列 $\mathcal{C}omp$, $\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{A}lg_K$ の中に含めておく．

現代の数学の最大の業績の 1 つは，この 3 種類の場合には，この例でほとんどすべての単純群が尽くされることが証明されたことである．さまざまな形の問題の定式化において，19 世紀に初めてなされたこの発見は，その後拡張され厳密になってきたが，今のところ，これまでに考察したすべて（さらに必ずしもコンパクトでない任意の微分可能な単純リー群も）の場合を含んで

いるわけではない．この理論には非常に多くの応用がある．空間の運動群の有限部分群に対応する正多面体の発見は，古代数学の最高の業績と考えられ，ユークリッドの『原論』は正多面体の記述を最終章にしている．これらは，古代数学によって発見された最も深い対称性である．単純リー群の発見と分類は，現代の数学において同じ位置を占めている．これらは，現代数学の理解がおよぶ最も精妙な対称性である．そして，プラトンが正 4 面体，正 8 面体，立方体，正 20 面体を，火，大気，大地，水という四元素の形状であると考えたように（正 12 面体は宇宙のシンボルとして別にした），現代の物理学者は素粒子の多様性を支配する一般原理を，さまざまな単純群 $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$, $SU(6)$ などの性質を使って求めようとしている．

ここでは完全な結果を与えることはしない．これら以外に，ちょうど 5 つの**例外型単純群**があることがわかっている．これらは E_6, E_7, E_8, G_2, F_4 と書かれ，次元はそれぞれ 78, 133, 248, 14, 52 であり，すべての単純群の表を与えるためには上に挙げた 3 つの系列に（(b), (c), (d) それぞれの場合に）つけ加えればよい．こうして得られた 3 つの型 —— コンパクト群の，複素解析的群の，体 K 上の代数的行列群の —— 単純群の間の関係は，後ろの 2 つの型に対しては非常に簡単である．$K = \mathbb{C}$ とすれば，複素群は代数群から得られる．複素群とコンパクト群の間の関係は，事実上 §15 ですでに示してある．コンパクト群は対応する複素解析群の極大コンパクト部分群で，すべての極大コンパクト部分群は共役である．

微分可能な単純リー群の分類は，コンパクトな単純リー群の分類よりいくぶん複雑ではあるが，概念的には同じようにはっきりしている．各タイプのコンパクト単純群には，非コンパクトな場合にいくつかのアナロジーがある．コンパクト群 $SU(n)$ を例にして，このアナロジーを述べてみる．これらは，群 $SU(p,q)$（ここで $U(p,q)$ は $|z_1|^2+\cdots+|z_p|^2-|z_{p+1}|^2-\cdots-|z_{p+q}|^2$ という形式を保つ複素線形変換全体の群）と，群 $SL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SL(n/2,\mathbb{H})$ を微分可能リー群と考えたものである．この最後の群 $SL(n,\mathbb{H})$ にはいくらか説明が必要になる．行列式の通常の定義は非可換環上の行列には適用できないので，S という記号の意味がはっきりしない．逃げ道は，$SL(n,\mathbb{R})$ と $SL(n,\mathbb{C})$ を異なる仕方で定義できるということの中にある．つまり，$SL(n,\mathbb{R})$ が $GL(n,\mathbb{R})$ の交換子群に一致し，$SL(n,\mathbb{C})$ も $GL(n,\mathbb{C})$ から同じように

得られることを証明するのは難しくない．それゆえ，$SL(n,\mathbb{H})$ については，群 $GL(n,\mathbb{H})$ の交換子群として定義する．

有限単純群に対してはこれまで何も言わなかったが，その分類は非常に心惹かれる問題である．すでに 19 世紀から，それらはある意味で単純リー群と同じに違いないという大胆な推測がなされている．この関係は，すでに扱った $PSL(n,\mathbb{F}_q)$ という例にヒントを得たものである．少し具体的に言えば，少なくとも多くの例を与えることができる，以下のアプローチが可能なのである．有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のすべての単純な代数的行列群を考え，そのような群 G に対して，成分が $\mathbb{F}_q$ の元であるような行列全体の群 $G(\mathbb{F}_q)$ を考える．体 $\mathbb{F}_q$ 上の単純代数群 G はほとんど知られている．つまり，体 $\mathbb{F}_q$ をその代数的閉包 K で置き換えれば，K 上の単純代数群は今述べた理論によって，$\mathcal{A}lg_K$ の群の表と 5 つの例外群のどれかとして得られる．しかしながら，$\mathbb{F}_q$ 上で定義され，$\mathbb{F}_q$ 上では同型でない 2 つの群が，K 上では同型である（または K 上で単純群ではない）ということが起こり得る．このような現象に，本質的には，実リー群の理論に出てきていたのである．そこでは体 $\mathbb{F}_q$ のアナロジーが $\mathbb{R}$ で，体 K のアナロジーが体 $\mathbb{C}$ である．たとえば，群 $SU(p,q)$, $p+q=n$ のすべては（行列の各成分である複素数を実部と虚部によって与えれば）$\mathbb{R}$ 上の代数群である．しかし，$\mathbb{C}$ 上で考えれば，それらはすべて互いに同型で，$SL(n,\mathbb{C})$ とも同型である．同じ状況が体 $\mathbb{F}_q$ の場合にも起こるのである．体 $\mathbb{F}_q$ 上のすべての代数群を分類する問題は，$\mathbb{F}_q$ の代数的閉包 K 上では知られていると仮定すれば，本質的に技術的な困難を克服すればよく，その答は知られている．こうして $\mathbb{F}_q$ 上定義された単純代数群 G の表が得られ，それに対して有限群 $G(\mathbb{F}_q)$ を構成することができる．もし（たとえば，$SL(n,\mathbb{F}_q)$ ではなく群 $PSL(n,\mathbb{F}_q)$ を考えるといった）適切な注意をしてこの構成を実行すれば，これらの群のすべてが，代数群としてだけでなく今度は有限群として単純群であることがわかる．群 G の次元が小さいとか，q の値が小さいとかに対応した，いくらかの例外があるだけである（たとえば，群 $PSL(n,\mathbb{F}_q)$ ではこうなっている）．こうして，**代数型の群**と呼ばれる有限単純群のいくつかの系列が得られた．

代数型の群に，もう 1 つの系列である交代群 $\mathfrak{A}_n$ $(n \geq 5)$ をつけ加えなければならない．しかしながら，すでに 19 世紀から，これらのどの系列にも当

てはまらない群の例が現れ始めている．しかしそのような例はいつも個別のもののようで，無限系列になるようなものではなかった．これまでの所，代数型の群でもなければ交代群 $\mathfrak{A}_n$ でもない有限単純群が 26 個発見されており，これらは**散在型単純群**と言われる．このうち最も大きな群の位数は

$$2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$$

である（訳あってこの群は**モンスター**と呼ばれている[4]）．現在では，代数型の群と交代群と 26 個の散在型の群が，すべての有限単純群を尽くしていることが証明されている．これは疑いもなく第 1 級の重要さを持つ結果である．残念ながら，これは数十人の数学者の長年の努力の結果として得られたものであって，その記述は何百という論文に分散しており，論文を集めると数万ページにもなるのである．それゆえ，この業績が，単純リー群や単純代数群の分類と同じ程度にまで，数学者によって受け入れられ消化されるようになるには，おそらく少なからぬ年月が必要となるだろう．

---

4 ［訳註］1973 年にフィッシャーとグライスにより存在が示唆されたもので，1980 年にグライスが，体 $\mathbb{Q}$ 上の 196883 次元の非結合的な可換環の自己同型群の部分群として実現し，その後も多くの分野との関係が発見されて注目を集めている．またこれも 1973 年にフィッシャーによって位数が $2^{41}\cdot 3^{13}\cdot 5^{6}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 23\cdot 31\cdot 47$ の単純群の存在が示唆され，1976 年にレオンとシムズが計算機を用いて存在証明をした．この 2 つの群の位数は他の 24 個に比べ格段に大きいために，それぞれモンスター，ベビー・モンスターという愛称がつけられている．

§17. 群の表現

群 G の表現とは，あるベクトル空間 L の線形変換の作る群 $\mathrm{Aut}(L)$ への準同型のことであった（§9 参照）．この概念は「座標化」のアイデアと密接な関係がある．「座標化」というのは，「等質な」集合 X を構成する「対象」を，ある個別に区別することが可能な「量」によって与えるという意味である．もちろん原理的に，そのような指定ができると言うものではない．というのも，逆写像を考えれば集合 X の対象自身を個別に区別できてしまうからである[1]．この矛盾は，実際上，座標化のプロセスにおいて，常に対象と量以外の第 3 者，つまり（いろいろな言葉の意味での）座標系 —— 物理的な計測手段に似た何かと考えられるもの —— が存在することによって解消される．1 つの座標系 S を固定したときにだけ，与えられた対象 $x \in X$ に，何らかの量，つまりその「一般座標」を与えることができる．しかしその時，「対象それ自身の性質を反映である量の性質を，座標系を選んだことで生まれる性質から，どのようにして区別するのか」という**基本的な問題**が生まれる．これは，この種の理論で生じるいろいろな関係性の**不変性問題**である．気分としては，理論物理学における，**観測者の問題**とまったく類似のものである．

2 つの「座標系」 S と S' があれば，通常 S を S' に写す集合 X の自己同型 g（つまり，X で定義されるすべての概念を保つ X の変換）を定義することができる．すなわち g は，各対象 x を対象 x' に写すのが，x' の S' に関する「座標」が x の S に関する「座標」に等しいときとして，定義される．このように，理論の中で許容されるあらゆる座標系は，対象の集合 X のある自己同型に対応しており，このようにして得られる自己同型が群 G をなすことは容易にわかる．この群は「量」の集合の上に自然に作用する．つ

[1] ［訳註］集合 X から「量」の集合への写像（座標づけ）に対する逆写像を考えている．つまり，どのような座標化をしても対象を区別することはできて，標準的で固有な（という意味の）座標化はあり得ないと言っているのである．

まり，$g \in G$ かつ $gS = S'$ であれば，g は，それぞれの対象の座標系 S における座標を，座標系 S' における座標に写す．量の集合がベクトル空間をなせば，この作用は G の表現を定める．

これらのことを，すべて例で説明しよう．体 K 上の n 次元ベクトル空間 L を考える．L の座標系（つまり基底）S を選んで，n 個の数の組でベクトルを与える．異なる座標系への移行は，線形変換 $g \in GL(n,K)$ によって与えられ，この線形変換の行列によって n 個の座標が同時に変換される．これが群 $GL(n,K)$ の，行列による**トートロジー表現**である．しかし，対象として 2 次形式をとれば，それは各座標系である対称行列によって与えられるが，違う座標系への移行は行列 A を CAC^* に移すことになり，$C \in GL(n,K)$ を線形変換 $A \mapsto CAC^*$ に移すという対称行列の空間における $GL(n,K)$ の表現が得られる．まったく同じように，2 次形式の代わりに線形変換を考えれば，今度は行列全体の空間における群 $GL(n,K)$ の別の表現で，$C \in GL(n,K)$ に線形変換 $A \mapsto CAC^{-1}$ を対応させるものが得られる．明らかに，任意のテンソルに対しても同じアイデアが使える．2 次形式の場合でも線形変換の場合でも，通常興味があるのは対応する行列の座標系の選び方によらない性質である．つまり，前の場合では $A \mapsto C^*AC$ という，また後の場合では $A \mapsto C^{-1}AC$ という置き換えで保たれる性質である．そのような性質に，前の場合では行列のランクが，後の場合では固有多項式の係数がある．

ある問題で，条件がある定まった対称性を持つ（つまり，何かある変換 g によって保たれる）なら，似通った状況が起こる．そのとき，その問題の解の全体 X は同じ変換によって自分自身に変換されることになる．つまり，問題の対称性の群が集合 X 上に作用し，通常これがこの対称性の群の表現を与える．

この状況のエレガントな「例」が [84] という論文にある．正方形 $ABCD$ の各頂点から任意の他の頂点へ行くことのできる，最短距離の道路網をどう作ったらよいかという問題を考える．証明するのは難しくないが，角 AED と BFC が $120°$ である図 38 (a) で図示された道路網が解答を与えている[2]．正方形 $ABCD$ は対称群 D_4 を持っているが（§13 定理 III），図 38 (a) は，

[2] ［訳註］もちろん，正方形の 4 辺は道路と考えてはいない．

明らかに，この群で自分自身に写らない！　これには，与えられた問題は図38の (a) と (b) で示される2つの解を持ち，これを合わせたものが D_4 全体の対称性を持つという説明ができる．つまり，D_4 は2つの図形 (a) と (b) の集合の上に作用している．

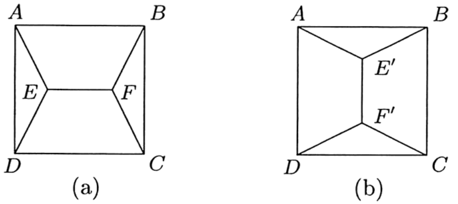


図 38

対称性の群の表現を与える「もう1つの例」を考える．周期 2π の周期関数を係数とする線形微分方程式

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{d^{n-i}f}{dt^{n-i}} = 0 \tag{1}$$

が与えられたとしよう．そのとき，任意の解 $f(t)$ に対して，関数 $f(t+2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ も解であり，写像 $f(t) \mapsto f(t+2\pi k)$ は解の作る n 次元空間の線形変換 U_k を定義する．$k \mapsto U_k$ は $U_{k+\ell} = U_k U_\ell$ を満たす群 $\mathbb{Z}$ の表現を与えており，つまり $U_k = U_1^k$ となっている．方程式 (1) を複素領域で考えると，この現象の少し複雑な例が得られる．$a_i(t)$ を複素変数 t の有理関数とする．t_0 がどの関数 $a_i(t)$ の極でもないならば，(1) は t_0 の近くで，t に関して正則な n 個の1次独立な解を持つ．これらの解を，t_0 を始点と終点にする閉曲線 s で，関数 $a_i(t)$ の極を通らないものに沿って解析接続すれば，同じ解空間に戻ってくる．すると，上のようにして，線形変換 $U(s)$ が得られ，これから基本群 $\pi(\mathbb{C} \setminus \{P_1, \ldots, P_m\})$ の n 次元表現が定義される．ここで，$P_1, \ldots, P_m$ は $a_i(t)$ たちの極である．これは方程式 (1) の**モノドロミー表現**と呼ばれる．

「もう1つの例」を挙げる．線形微分方程式 $L(x_1, \ldots, x_n, F) = 0$ が

$x_1, \ldots, x_n$ に関して対称な係数を持つとする．すると，$x_1, \ldots, x_n$ の置換はこの解空間における群 $\mathfrak{S}_n$ の表現を定める．n 個の同じ粒子からなる量子力学的な系の記述ではこういう状況が起きる．このような系の状態は波動関数 $\psi(q_1, \ldots, q_n)$ によって与えられる．ここで q_i は i 番目の粒子の座標の集合で，ψ はスカラー $\lambda, |\lambda| = 1$ を掛けることを除いて決まる．粒子の任意の置換 σ は状態を変えてはならず，関数 ψ が定数倍されることになる．

$$\psi(q_{\sigma(1)}, \ldots, q_{\sigma(n)}) = \lambda(\sigma)\psi(q_1, \ldots, q_n)$$

という関係式が得られ，これから $\lambda(\sigma_1\sigma_2) = \lambda(\sigma_1)\lambda(\sigma_2)$ が得られ，つまり，$\sigma \mapsto \lambda(\sigma)$ は群 $\mathfrak{S}_n$ の 1 次元表現になる．1 次元表現は 2 つ知られている．1 つは恒等表現 $\varepsilon(\sigma) = 1$ で，もう 1 つは偶奇性(パリティ)表現 $\eta(\sigma)$ で，偶置換 σ に対しては $\eta(\sigma) = 1$ であり，奇置換に対しては $\eta(\sigma) = -1$ である．$\mathfrak{S}_n$ に他の 1 次元表現が存在しないことは容易に証明される．こうして，

$$\psi(q_{\sigma(1)}, \ldots, q_{\sigma(n)}) = \psi(q_1, \ldots, q_n) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$$

となるか，

$$\psi(q_{\sigma(1)}, \ldots, q_{\sigma(n)}) = \eta(\sigma)\psi(q_1, \ldots, q_n) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$$

となるかのどちらかになる．このどちらの場合が起こるかは粒子の性質による．前の場合は（たとえば光子のように）**ボーズ–アインシュタイン統計**に支配され，後の場合は（たとえば電子，陽子，中性子のように）**フェルミ–ディラック統計**に支配されると言う．

§9 で，不変部分空間，既約表現，表現の直和，正則表現，表現の指標という，群の表現論の基本概念を定義した．以下では，これまで扱った基本的なタイプの群の中から，有限群，コンパクト・リー群，複素リー群という 3 種類の群の複素数体上の表現を考える．

A. 有限群の表現

有限群に対しては，§10 で（半単純環の理論の特殊な場合として），一連の定理を得た．それらは，既約表現の数の有限性であり，各既約表現が正則表

現の既約分解の中に現れるという定理であり，バーンサイドの定理

$$|G| = \sum_{i=1}^{h} n_i^2$$

（ここで n_i は群 G の既約表現の次数）であり，既約表現の個数 h が群 G の群環の中心 $Z(\mathbb{C}[G])$ のランクに等しいという定理であり，既約表現が指標によって与えられるという定理である．

最初にアーベル群の場合を考える．$\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(L)$ をそのような群の既約表現とする（G は有限でも無限でもよい）．すると変換の集合 $\{\sum \alpha_g \rho(g) \mid g \in G,\ \alpha_g \in \mathbb{C}\}$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L)$ の中の既約な代数をなし，バーンサイドの定理（§10 定理 XVII）によって $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L)$ 全体と一致する．G がアーベル群なので，代数 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L)$ は可換になり，これは表現の次数が 1 の時にしか起こり得ない．こうして，**アーベル群の既約表現は 1 次元表現である**ことがわかる．

有限アーベル群に対しては，この結果は別の考察からも明らかである．群環 $\mathbb{C}[G]$ は可換だから（§10 定理 V によって），体の直和に同型，つまり $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}^n$ である．既約表現はこの分解の成分である $\mathbb{C}$ への射影に帰着する．つまり，$x = (z_1, \ldots, z_n)$ ならば，$\chi_i(x) = z_i$ である．したがって次の定理が得られる．

定理 I．有限アーベル群のすべての既約表現は 1 次元で，その数は群の位数と同じである．

こうして，有限アーベル群 G の既約表現は，複素数の乗法群 $\mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$ への準同型

$$\chi : G \to \mathbb{C}^*$$

と一致する．χ はそのトレースと一致し，それゆえ**指標**と呼ばれる．

（必ずしもアーベル群でない）任意の群 G の群 $\mathbb{C}^*$（や任意のアーベル群）への準同型は，元ごとに掛けることができる．つまり，指標 χ_1 と χ_2 との**積**は，指標 $\chi = \chi_1\chi_2$

$$\chi(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) \tag{2}$$

のことである．この定義の積に関して，アーベル群 G の指標が群をなすこ

とが容易にわかる．この群は G の**指標群**と呼ばれ，$\hat{G}$ と書かれる．このとき単位元は，$\varepsilon(g)=1,\ g\in G$ で与えられる指標 ε であり，指標 χ の逆元は指標 $\chi^{-1}(g)=\chi(g)^{-1},\ g\in G$ である．アーベル群 G に対して，指標群 $\hat{G}$ は G と同じ位数であるだけでなく，抽象群として G と同型である．しかしながら，これらの群の間には「自然な」同型は存在しない．しかし，$\hat{G}$ の指標群 $\hat{\hat{G}}$ は自然に G と同型になる．(2) 式から，$g(\chi)=\chi(g)$ によって与えられる写像 $G\to\hat{\hat{G}}$ は準同型であることがわかり，容易に確かめられるように，同型でもある．この状況はベクトル空間の双対性の概念と似通っている．

群 G とその指標群との関係は，部分群へも拡張される．部分群 $H\subset G$ に，H のすべての元の上で 1 という値をとる指標全体のなす部分群 $H^*\subset\hat{G}$ を対応させると，G の部分群と指標群 $\hat{G}$ の部分群との間の 1 対 1 対応が得られる．この対応は包含関係を反対にする．つまり，$H_1\subset H_2$ ならば，$H_1^*\supset H_2^*$ となる．さらに $H^*\cong\widehat{(G/H)}$ となる．

指標は幾つかの重要な関係を満たしている．何よりも，$\chi\neq\varepsilon$（恒等指標）であれば

$$\sum_{g\in G}\chi(g)=0 \tag{3}$$

となっている．実際，仮定により $\chi(g_0)\neq 1$ となる $g_0\in G$ が存在する．(3) の左辺で g の代わりに g_0g を代入すると，一方では変わらないままだが，他方では一斉に $\chi(g_0)$ 倍されるので，それから (3) が導かれる．$\chi=\varepsilon$ のときは，$\varepsilon(g)=1,\ g\in G$ であるので，

$$\sum_{g\in G}\varepsilon(g)=|G| \tag{4}$$

が得られる．2 つの指標 χ_1,χ_2 に対して，(3) で $\chi=\chi_1\chi_2^{-1}$ と置けば，(3) と (4) から

$$\sum_{g\in G}\chi_1(g)\chi_2(g)^{-1}=\begin{cases}0 & (\chi_1\neq\chi_2\text{ のとき}),\\ |G| & (\chi_1=\chi_2\text{ のとき})\end{cases} \tag{5}$$

となる．元 g の位数は有限だから，数 $\chi(g)$ は 1 のベキ根であり，絶対値は 1 である．それゆえ $\chi(g)^{-1}=\overline{\chi(g)}$ となり，等式 (5) のことを，指標は G 上の複素数値関数の空間において**正規直交系**である，と言い表せるようにな

る．この空間でのスカラー積の定義は

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

としている．こうして指標は正規直交基底をなし，G 上の任意の関数は

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c_\chi \cdot \chi$$

と分解され,「フーリエ係数」c_χ は

$$c_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi(g)}$$

という式で定まる．群と指標群と間の対称性（$\hat{\hat{G}} = G$）を使うと (3) と (5) から

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = 0 \qquad (g \neq e) \tag{4'}$$

と

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g_1)\chi(g_2^{-1}) = \begin{cases} 0 & (g_1 \neq g_2 \text{のとき}), \\ |G| & (g_1 = g_2 \text{のとき}) \end{cases} \tag{5'}$$

という関係式が得られる．

有限アーベル群の指標の理論の 1 つの重要な応用が，整数論に関係している．G として，環 $\mathbb{Z}/(m)$ の可逆元のなす乗法群 $(\mathbb{Z}/(m))^*$ を，つまり m と互いに素な数からなる剰余類 $a + m\mathbb{Z}$ の作る群をとる．群 $(\mathbb{Z}/(m))^*$ の指標 χ を，可逆でない元の上では 0 として定義を拡張すると，$\mathbb{Z}$ 上の周期 m の周期関数と考えることができる．このような関数は**ディリクレ指標**と呼ばれる．これに付随する**ディリクレ級数**

$$L(s, \chi) = \sum_{n > 0} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

は整数論の基本的な道具の 1 つである．その考察は，たとえば，a と m が互いに素ならば，剰余類 $a + m\mathbb{Z}$ が無限個の素数を含むという**ディリクレの定理**の証明の基になっている．その証明の途中で，剰余類 $a + m\mathbb{Z}$ に属する n

についての部分和 $\sum' \dfrac{1}{n^s}$ を分離することが必要になる．ここで関係式 (5′) を適用すると，これからこの和が $\dfrac{1}{\varphi(m)}\sum_{\chi}\overline{\chi(a)}L(s,\chi)$ と表わすことができることがわかる．ここで，$\varphi(m)$ は群 $(\mathbb{Z}/(m))^*$ の位数であり（オイラー関数），和はこの群のすべての指標にわたってとっている．

「非可換な有限群」に移って，既約表現の数の問題から始めよう．§10 定理 XIII に従えば，これは群 G の群環 $\mathbb{C}[G]$ の中心 $Z(\mathbb{C}[G])$ のランクに等しい．$\mathbb{C}[G]$ の元 $x=\sum_{g\in G}f(g)g$ が中心 $Z(\mathbb{C}[G])$ に属す（つまり，x がすべての $u\in G$ と可換である）ことと，すべての $u,g\in G$ に対して $f(ugu^{-1})=f(g)$ を満たすことが同値であることは容易にわかる．言い換えれば，関数 $f(g)$ は群 G の元の共役類の上で一定である．したがって，中心の基底は，

$$z_C=\sum_{g\in C}g$$

の形の元からなる．ここで，C は異なる共役類を動く．特に次の定理が得られる．

定理 II. **有限群 G の既約表現の数は，G の元の共役類の数に等しい．**

アーベル群の指標がそれ自身群をなすという事実のアナロジーが，一般の場合に見つけられるだろうか？　恒等指標のアナロジーには，1 次元恒等表現 $\varepsilon(g)=1$ $(g\in G)$ がある．表現 ρ の逆元のアナロジーには，いわゆる**反傾表現** $\hat{\rho}(g)=\rho(g^{-1})^*$ を提案することもできる．ここで，$*$ は ρ の作用空間 L の双対空間 L^* 上に作用する随伴作用素を表わしている．ρ がユニタリ表現，つまり，すべての $\rho(g)$ があるエルミート計量に関してユニタリであれば（§10 でこのような計量がいつも存在することがわかっている），変換 $\hat{\rho}(g)$ の行列は単に $\rho(g)$ の行列の複素共役である．

最後に指標の積のアナロジーもまた存在する．2 つの群 G_1, G_2 と，それらのベクトル空間 L_1, L_2 上の 2 つの表現 $\rho_1: G_1\to \mathrm{Aut}(L_1)$ と $\rho_2: G_2\to\mathrm{Aut}(L_2)$ が与えられているという場合から始めよう．これらの空間のテンソル積 $L=L_1\otimes_{\mathbb{C}}L_2$（§5 参照）と，$G_1$ と G_2 の直積 $G_1\times G_2$

の写像 ρ で，$\rho(g_1, g_2)(x_1 \otimes x_2) = \rho_1(g_1)(x_1) \otimes \rho_2(g_2)(x_2)$ という性質によって定義されたものを考える．これが群 $G_1 \times G_2$ の表現となる写像 $\rho: G_1 \times G_2 \to \mathrm{Aut}(L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2)$ を定めることは容易にわかる．これは表現 ρ_1 と ρ_2 の**テンソル積**と呼ばれ，$\rho_1 \otimes \rho_2$ と書かれる．

たとえば，G_1 と G_2 が集合 X_1 と X_2 上に作用し，L_1 と L_2 がこれらの作用で保たれる X_1 と X_2 上の関数の空間であるとし，ρ_1 と ρ_2 がこれらの空間で定義された表現であれば，表現 $\rho_1 \otimes \rho_2$ は，$f_1(x_1)f_2(x_2)$ $(f_1 \in L_1, f_2 \in L_2)$ で張られる X_1 と X_2 上の関数の空間に作用する．群 $G_1 \times G_2$ のすべての既約表現が，G_1 と G_2 の既約表現 ρ_1 と ρ_2 に対する $\rho_1 \otimes \rho_2$ の形であることを示すのは難しいことではない．これらの議論すべては，(群環 $\mathbb{C}[G]$ だけでなく）任意の半単純代数の表現にも有効である．

さて，群 G_1 と G_2 が一致する，つまり，$G_1 = G_2 = G$ としよう．そのとき（ここでは，群であるという特殊性を本質的に使っている），$\varphi(g) = (g, g)$ と定義することによって対角埋め込み $\varphi: G \to G \times G$ を構成することができる．合成写像 $(\rho_1 \otimes \rho_2) \circ \varphi$ は元の群の表現 $G \to \mathrm{Aut}(L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2)$ を定め，この表現は ρ_1 と ρ_2 の**テンソル積**と呼ばれる．

可換な場合との本質的な違いは，群 G の 2 つの既約な表現 ρ_1 と ρ_2 に対して，テンソル積 $\rho_1 \otimes \rho_2$ が可約になるかも知れないということである．こうして，既約表現は群をなさず，2 つの既約表現の積は残りの既約表現の 1 次結合になるのである．たとえば，空間 L と L^* 上に作用する表現 ρ と $\hat{\rho}$ は，空間 $L \otimes_{\mathbb{C}} L^*$ 上の表現 $\rho \otimes \hat{\rho}$ を定める．線形代数でよく知られているように，$L \otimes_{\mathbb{C}} L^*$ は線形変換全体の空間 $\mathrm{End}(L)$ と同型である（この同型は，ベクトル $a \otimes \varphi \in L \otimes_{\mathbb{C}} L^*$ をランク 1 の線形変換 $x \mapsto \varphi(x)a$ に写す）．$\mathrm{End}(L)$ における表現 $\rho \otimes \hat{\rho}$ が，$\alpha \mapsto \rho(g)\alpha\rho(g)^{-1}$ $(\alpha \in \mathrm{End}(L))$ と書かれることは容易にわかる．しかしこのとき，恒等変換の何倍かのような変換は変化しないので，表現 $\rho \otimes \hat{\rho}$ は可約で，その既約分解の中に恒等変換が含まれることになる．(既約表現 ρ に対して，既約表現 σ であって，恒等表現が $\rho \otimes \sigma$ の既約分解の中に含まれる唯一のものが表現 $\hat{\rho}$ であることを示すことができる．この非常に弱い意味でだが，$\hat{\rho}$ は ρ の「逆」となる．) χ_1 と χ_2 が表現 ρ_1 と ρ_2 の指標のとき，$\rho_1 \otimes \rho_2$ の指標が $\chi_1\chi_2$ であることは容易に確かめられる．

この構成を繰り返せば，群 G に対して空間 $L\otimes L\otimes\cdots\otimes L$ における表現 $\rho\otimes\rho\otimes\cdots\otimes\rho$ を考えることができる．これは表現 ρ のテンソルベキと言われ，$T^p(\rho)$ と書かれる（ここで，p は因子の数である）．これから商をとれば，空間 $S^p(L)$ における表現 $S^p(\rho)$ と，$\bigwedge^p L$ における表現 $\bigwedge^p(\rho)$ が得られる．

各既約表現 ρ_i に対して，$\rho_i(g)$ をユニタリ行列 $r^i_{jk}(g)$ として書くことのできる基底を選ぶ（§10 例 3 により，そのような基底は存在する）．

群 G 上の関数の集合の上に，スカラー積

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$$

を導入する．関係式 (5) とほとんど同じようにして，次の定理が証明される．

定理 III. 関数 $r^i_{jk}(g)$ は互いに直交しており，関数 r^i_{jk} のノルム[3]の **2** 乗は $\dfrac{1}{n_i}$ である．ここで，n_i は表現 ρ_i の次数である．

特に，指標は関数の正規直交系をなす．

例 1. 群 $\mathfrak{S}_3$ は，恒等表現 $\varepsilon(\sigma)$ と，σ の偶奇に従って ± 1 となる表現 $\eta(\sigma)$ という 2 つの 1 次元表現を持つ．$\mathfrak{S}_3$ を集合 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ の置換として実現すれば，X 上の関数で $\displaystyle\sum_{x\in X} f(x)=0$ を満たすもののなす空間の上に，$\mathfrak{S}_3$ のランク 2 の表現 ρ_2 が得られる．これもまた既約である．$|\mathfrak{S}_3| = 6 = 1^2+1^2+2^2$ だから，バーンサイドの定理によって，これらが $\mathfrak{S}_3$ の既約表現のすべてである．

例 2. 正 8 面体群 O（§13 例 4 参照）．群 O は正 8 面体の対蹠位置にある頂点の対たちの置換を引き起こし，それにより準同型 $O\to\mathfrak{S}_3$ が定義される．それゆえ，例 1 での $\mathfrak{S}_3$ の表現から群 O のいくつかの既約表現が得られる．

---

[3] ［訳註］考えられてきたノルムは少しずつ違ったものである（§3, §7, §10, §11 に出ている）．普通あまり混同されることはないと思うが，本書のように広い分野にまたがった考察をする場合には，表面的には矛盾と感じられることがあるかも知れない．今の場合，関数の集合に内積が与えられる状況で，断りなくノルムと呼ばれている対象によって多少定義や条件が異なることがある．ここでは，内積空間のノルム $||f|| = \sqrt{(f,f)}$ として定義されるものであることが暗黙のうちに仮定されているのである．

これらには，正 8 面体の幾何から見ると以下のような意味がある．§13 例 4 で見たように，O は部分群として正 4 面体群 T を持ち，$[O:T]=2$ である．すると，$\eta(g)=1$ $(g \in T)$ かつ $\eta(g)=-1$ $(g \notin T)$ となる．表現 ρ_2 は，正 8 面体の頂点集合の上の関数で，対蹠頂点上で同じ値をとり，すべての値の和が 0 であるもの全体の空間に実現される．さらに，包含写像 $O \to SO(3)$ は群 O の 3 次元「トートロジー」表現 ρ_3 を定める．最後に，テンソル積 $\rho_3 \otimes \eta$（今の場合は単に変換 $\rho_3(g)$ に数 $\eta(g)$ を掛けるというもの）はまた別の表現 ρ_3' を定義する．正 8 面体の幾何の観点からは，次の意味がある．つまり，§13 定理 V で見たように，群 $O(3)$ は，正 8 面体群とは同型だが $SO(3)$ には含まれない部分群 OT を含み，準同型の合成 $O \cong OT \to O(3)$ が表現 ρ_3' を定めている．$|O|=24=1^2+1^2+2^2+3^2+3^2$ だから，これで正 8 面体群のすべての既約表現が見つかったことになる．

B. コンパクト・リー群の表現

コンパクト・リー群の表現は，有限群の表現が満たすほとんどすべての性質を満たす．有限群の表現のすべての性質の基礎にそれらの半単純性があり，§10 で見たように，このことは（体 $\mathbb{C}$ 上とか任意の体上の表現に対する）さまざまな場合においても，ただ 1 つのアイデアによって導かれる．つまり，群の元に関連したいろいろな量 $F(g)$ に対する和 $\displaystyle\sum_{g \in G} F(g)$ を考えることである（つまり，群上で和とか平均がとれるということである）．コンパクト・リー群の理論にこのアイデアのアナロジーがある．対応する表示は「群上の積分」と呼ばれる．それは，コンパクト・リー群 G 上の任意の連続関数 $f(g)$ に，以下の性質を満たす数 $I(f)$ を対応させるものであり，$I(f)$ は**群上の積分**と呼ばれる．

$$I(f_1+f_2)=I(f_1)+I(f_2),$$

$$I(\alpha f)=\alpha I(f) \quad (\alpha \in \mathbb{C}),$$

$$I(f)=1 \quad (f \equiv 1 \text{ のとき}),$$

$$I(|f|^2)>0 \quad (f \neq 0 \text{ のとき}),$$

$f_1(g) = f(g^{-1})$, $f_2(g) = f(ug)$, $f_3(g) = f(gu)$ $(u \in G)$ と置くとき,

$$I(f_i) = I(f) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

I の存在の証明は，群 G 上の不変微分 n 形式 ω の構成に基づいている（ここで，$n = \dim G$）．そこで,

$$I(f) = c \int_G f\omega$$

とおき，c は $f \equiv 1$ に対して $I(f) = 1$ となるように選ぶ[4]．微分形式 ω が不変であるとは，すべての $u \in G$ に対して $\tau_u^* \omega = \omega$ であるときに言う．ここで，τ_u は $g \mapsto gu$ という群 G の変換である．不変形式は§15 の初めに述べた方法で構成される．つまり，単位元 e における G の接空間 T_e 上の n 形式 $\omega_e \in \bigwedge^n T_e^*$ を選んで，T_g 上の値 ω_g を $(\tau_g^*)^{-1}\omega_e$ と定義すればよい．

群上の積分 $I(f)$ の存在によって，§10 例 3 の議論が逐語的にコンパクト群に移し変えられ，コンパクト部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ がある正定値エルミート形式 φ を不変にすることを証明することができる．この形式は標準形式 $\sum |z_i|^2$ と同値なので，ある $C \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して $G \subset CU(n)C^{-1}$ となる．$GL(n, \mathbb{C})$ のコンパクト部分群 G がユニタリ群の部分群に共役であるというこの結果は，§15 例 8 で証明なしで述べたものである．同じように，群 $GL(n, \mathbb{R})$ のコンパクト部分群は群 $O(n)$ の部分群と共役である．このアイデアには，次の有名な応用がある．

例 3（ヘルムホルツ−リーの定理）． n 次元実ベクトル空間 L の旗 F とは，向きづけられた部分空間の埋め込みの列 $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_{n-1} \subset L_n = L$ $(\dim L_i = i)$ のことである．もし L にユークリッド計量を与えれば，旗は正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ と一意的に対応する．このとき，(向きづけも考えて) $L_i = \{e_1, \ldots, e_i\}$ としている．このことから，すべての旗の作る多様体 $\mathcal{F}$ はコンパクトである．群 $GL(n, \mathbb{R})$ は $\mathcal{F}$ の上に，$g \in GL(n, \mathbb{R})$ と $F = (L_1, L_2, \ldots, L_n) \in \mathcal{F}$ に対して,

$$g(F) = g(L_1, L_2, \ldots, L_n) = (g(L_1), g(L_2), \ldots, g(L_n))$$

---

[4] ［訳註］つまり，c は ω に関するコンパクト多様体の n 次元体積の逆数である．

と作用する．

定理．群 $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ が $\mathcal{F}$ 上に単純推移的に作用する（すなわち，任意の 2 つの旗 F_1 と F_2 に対して，$g(F_1) = F_2$ を満たす変換 $g \in G$ が一意的に存在する）とする．そのとき，G が直交変換の群になるようなユークリッド計量を L に与えることができる．

実際，G の作用のもとでの $\mathcal{F}$ の点の固定部分群は自明なので，G は任意の点の軌道と同一視することができ，また作用の推移性によってこれは $\mathcal{F}$ 全体となる．それゆえ，$\mathcal{F}$ と同じように G もコンパクトである．すでに見たように，このことから G に関して不変なユークリッド計量が存在することがわかる．G がこの計量での直交群全体になることは，G が $\mathcal{F}$ 上に推移的に作用することから容易にわかる．

今証明したことは，定曲率リーマン多様体の内在的な特徴付けを与える有名な「ヘルムホルツ–リーの定理」の，局所的なアナロジーであり，証明の第 1 段階でもある．つまり，X を微分可能多様体，G をその微分同相の群で，点 $x \in X$ と接空間 T_x の旗の集合の上に単純推移的に作用する（つまり，任意の点 $x, y \in X$ と T_x の旗 F_x と T_y の旗 F_y に対して，$g(x) = y$ かつ $g(F_x) = F_y$ を満たす変換 $g \in G$ がただ 1 つ存在する）ものとする．そのとき，X に，定曲率空間の 1 つ，つまりユークリッド空間，ロバチェフスキー空間，球面空間またはリーマン空間（n 次元球面の中心的鏡映による商空間のこと）のどれかになるようなリーマン計量を与え，さらに G をその幾何の運動群とすることができる．すでに証明したことから，X にリーマン計量を導入し，リーマン幾何の技術を適用することができるようになる．

旗の集合上の運動群の作用が推移的であることを，リーマン多様体の**完全イソトロピー公理**と言う．こうして，この公理を満たすリーマン多様体は正多面体のアナロジーになっており（§13 例 4 参照），逆に正多面体は定曲率リーマン多様体の有限モデルになっている．

おそらくは，ヘルムホルツ–リーの定理の証明において初めて，旗多様体 $\mathcal{F}$ の役割が理解されたのである．その後それは，トポロジーで，リー群の表現論で，代数群論で，と繰り返し現れることになる．その際，それは常に，今

出てきた性質，つまり，群 $GL(n,\mathbb{R})$ が推移的に作用する「最良の」コンパクト多様体であるという性質を反映している．

ここでコンパクト群の表現論に戻ることにしよう．これも，群上の積分の存在に基づいている．

定理 IV．(1) コンパクト・リー群 G の有限次元表現はユニタリ表現に同値であり，半単純である．

(2) 2 乗可積分関数 f（$I(|f|^2) < \infty$ を満たす関数）の空間 $L^2(G)$ に内積

$$(f, g) = I(f\bar{g})$$

を導入すると，有限次元既約表現の行列に対する直交関係式（定理 III 参照）のアナロジーが逐語的に成り立つ．

(3) 空間 $L^2(G)$ 上に群 G の正則表現を $T_g(f)(u) = f(ug)$ という条件で定義すると，正則表現は可算個の有限次元既約表現の直和として分解され，各既約表現はその次数と同じ回数だけこの分解の中に現れる．有限次元表現はそのトレースによって一意的に決定される．

(4) 群 G が埋め込み $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ を持てば，そのすべての既約表現は $T^p(\rho) \otimes T^q(\hat{\rho})$ の表現の分解の中に現れる．

(5) 群 $G_1 \times G_2$ の既約表現は，ρ_1, ρ_2 を群 G_1, G_2 の既約表現として，$\rho_1 \otimes \rho_2$ の形をしている．

第 1 と第 2 の主張は，有限群の場合とまったく同じようにして証明できる．第 3 の主張の証明のアイデアは，G をある有限次元ベクトル空間 V の線形変換の群 $\mathrm{Aut}(V)$ の閉部分群であると仮定すれば，説明することができる（実際，G をそのように表わすことはいつも可能であり，古典群のような重要な群の例では定義自体に含まれている）．そのとき，「トートロジー表現」$\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$，つまり $G \to GL(n,\mathbb{C})$ が得られる $(n = \dim V)$．$\rho(g)$ の行列が $(r_{jk}(g))$ であれば，$2n^2$ 個の関数 $x_{jk} = \mathrm{Re}\, r_{jk}(g)$ と $y_{jk} = \mathrm{Im}\, r_{jk}(g)$ の値が元 g を一意的に定める．ワイエルシュトラスの近似定理により，G 上の任意の連続関数 f は，x_{jk}，y_{jk} の多項式によって近似することができる．しかし，x_{jk}，y_{jk} の多項式は，容易にわかるように，あらゆる可能な表現

$T^p(\rho) \otimes T^q(\hat{\rho})$ の，またはその既約成分の行列要素の 1 次結合に一致する．それゆえ，G 上の任意の連続関数は，有限次元既約表現 ρ_i に対応する関数 $r^i_{jk}(g)$ の 1 次結合によって近似することができる．このことから容易に，任意の関数 $f \in L^2(G)$ がこの直交系における級数として展開できることがわかる．これから (3) は容易に導かれる．この証明はさらに，群 G の既約表現に関する情報である (4), (5) も与えている．

最後に，この性質 (1)–(3) が，任意のコンパクトな位相群に対して成り立つことを注意する．この場合,「群上の積分」$I(f)$ は別の方法，つまり，集合論のエレガントな構成法により定義される．

例 4. コンパクトな可換リー群. ここではすべての既約表現は 1 次元であり，有限アーベル群の指標理論の完全なアナロジーが成り立つ．可換なコンパクト群 G には可算個の指標，つまり連続な準同型 $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ がある．それらは関係式 (5) と類似な直交関係によって結ばれていて，任意の関数 $f \in L^2(G)$ はそれらの級数 $f = \sum_\chi c_\chi \cdot \chi$ として展開できる．指標は（離散）群 $\widehat{G}$ をなし，群 G と $\widehat{G}$ の部分群の間には，有限群の場合と同じ関係がある．円周群 $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ という特殊な場合には，群 $\widehat{G}$ は $\mathbb{Z}$ と同型になる．というのも，G のすべての指標は

$$\chi_n(\varphi) = e^{2\pi i n\varphi}$$

の形をしているからである．展開 $f = \sum c_n \chi_n$ が f の**フーリエ級数**展開である．このことはフーリエ級数論における，関数 $e^{2\pi i n\varphi}$（または $\sin 2\pi n\varphi$ と $\cos 2\pi n\varphi$）の，G の指標としての役割を「説明」している．

この理論は，可換な局所コンパクト群のクラスに拡張するとき，一番完全な様相を呈する．群 G とその指標群 $\widehat{G}$（これもまた局所コンパクト群）との間の関係は，**ポントリャーギン双対性**によって記述される．

例 5. $\rho : SO(n) \to \mathrm{Aut}(L)$ を，n 次元ユークリッド空間 L の直交変換としての，群 $SO(n)$ の「トートロジー」表現とする．表現 $S^2\rho$ は,（L のユークリッド構造を利用した L と L^* の同一視によって）L 上の双線形対称形式の空間に実現することができる．そのとき，$u \in SO(n)$ は関数 $\varphi(a, b)$ $(a, b \in L)$

に，それを $\varphi(\rho(u)^{-1}a, \rho(u)^{-1}b)$ とすることによって作用する．正規直交基底では φ は対称行列 A として書くことができ，その変換法則は馴染みの $A \mapsto \rho(u)A\rho(u)^{-1}$ という形になる（$\rho(u)^* = \rho(u)^{-1}$ であるから）．明らかに，これに関して単位行列は不変である．それゆえ，$S^2\rho = I \oplus S_0^2\rho$ となる．ここで，I は恒等表現であり，$S_0^2\rho$ はトレース 0 の行列全体の空間上の表現である．$S_0^2\rho$ が既約であることは容易に確かめられる．

以下の例 6–8 は，4 次元リーマン多様体論で活躍するものである．

例 6. 特に $n = 4$ の場合を考えると，$SO(4) \cong (SpU(1) \times SpU(1))/\{\pm(1,1)\}$ となる（§15 の (10) 式参照）．$S_0^2\rho$ は $SpU(1) \times SpU(1)$ の表現と考えることができ，それゆえ定理 IV (5) から，$\rho_1 \otimes \rho_2$ の形をしている．ここで，ρ_1, ρ_2 は群 $SpU(1)$ の表現であるが，これらの表現を求めてみよう．上の例のように，表現 $S_0^2\rho$ はトレース 0 の双線形対称形式 $\varphi(a,b)$ の作る 9 次元の空間の上に作用する．ここで，$a, b \in \mathbb{H}$（四元数の空間）と考えることができる．さて，$u \in SpU(1) \times SpU(1)$ は $u = (q_1, q_2)$ という形をしており，$\rho(u)a = q_1 a q_2^{-1}$ となっている．ここで，$q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ は $|q_1| = |q_2| = 1$ を満たすものである（§15 (9) 参照）．純虚四元数の（3 次元）空間 $\mathbb{H}^-$ 上に，$\rho_1(q) : x \mapsto qxq^{-1}$ $(x \in \mathbb{H}^-, q \in \mathbb{H}, |q| = 1)$ で与えられる群 $SpU(1)$ の作用 ρ_1 を考える．2 つの元 $x, y \in \mathbb{H}^-$ に対して，関数 $\varphi_{x,y}(a,b) = \mathrm{Re}\,(xay\bar{b})$, $a, b \in \mathbb{H}$ を考える．$\varphi_{x,y}(a,b) = \varphi_{x,y}(b,a)$ であることと，作用 $x \mapsto q_1 x q_1^{-1}$, $y \mapsto q_2 y q_2^{-1}$ が表現 $S^2\rho$ での関数 $\varphi_{x,y}(a,b)$ の変換であることが同値なことは容易に確かめられる（$\mathrm{Re}\,\bar{\xi} = \mathrm{Re}\,\xi$, $\mathrm{Re}\,(\xi\eta) = \mathrm{Re}\,(\eta\xi)$, $\bar{x} = -x$, $\bar{y} = -y$ と，$|q| = 1$ ならば $\bar{q} = q^{-1}$ であることを使う必要がある）．こうして，$x \otimes y \mapsto \varphi_{x,y}$ で与えられる準同型 $\rho_1 \otimes \rho_1 \to S^2\rho$ が得られる．ここで ρ_1 は $\mathbb{H}^-$ における $SpU(1)$ の（そして $SO(3)$ の）標準表現である．この核が 0 であることは容易にわかり，像は $S_0^2\rho$ しかあり得ない．それゆえ $S_0^2\rho \cong \rho_1 \otimes \rho_1$ である．

例 7. もう一度 $n = 4$ として，$\mathbb{H}$ 上の双線形歪対称形式の空間に実現される表現 $\bigwedge^2 \rho$ を考える（ρ は例 5–6 と同じもの）．$x \in \mathbb{H}^-$ に対して双線形形式 $\psi_x(a,b) = \mathrm{Re}\,(ax\bar{b})$ を考える．すると，$\psi_x(b,a) = -\psi_x(a,b)$ であり，

$x \mapsto \psi_x$ は表現の準同型 $(1 \otimes \rho_1) \to \bigwedge^2 \rho$ を定義する．同様に，$x \in \mathbb{H}^-$ を $\xi_x(a,b) = \mathrm{Re}\,(\bar{a}xb)$ に写すことにしても，準同型 $(\rho_1 \otimes 1) \to \bigwedge^2 \rho$ が定義される．これらを加えると，準同型 $(\rho_1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes \rho_1) \to \bigwedge^2 \rho$ が得られるが，容易に確かめられるように，これは同型であり，$\bigwedge^2 \rho$ の既約分解が得られる．

例 8. 最後に表現 $S^2 \bigwedge^2 \rho$ を考える．これは，**4 次元リーマン多様体の曲率テンソル**と同じ対称性の条件を満たすテンソルの空間における，群 $SO(4)$ の表現である．例 7 によれば，$\bigwedge^2 \rho = (\rho_1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes \rho_1)$ となる．ここで，ρ_1 は群 $SO(3)$ の $\mathbb{R}^3$ におけるトートロジー表現である．任意の群の任意の表現 ξ, η に対して，$S^2(\xi \oplus \eta) = S^2\xi \oplus S^2\eta \oplus (\xi \otimes \eta)$ となることが容易にわかる．特に，$S^2 \bigwedge^2 \rho = (S^2\rho_1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes S^2\rho_1) \oplus (\rho_1 \otimes \rho_1)$ となる．例 5, 6 の結果により，

$$S^2 \bigwedge\nolimits^2 \rho = (I \otimes 1) \oplus (S_0^2\rho_1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes I) \oplus (1 \otimes S_0^2\rho_1) \oplus S_0^2\rho \qquad (6)$$

と書くことができ，これが $S^2 \bigwedge^2 \rho$ の既約分解を与えている．このことは，曲率テンソルのどういう成分の組が不変な仕方で取り出されうるのか，それゆえ幾何学的な意味を持ちうるのかを示している．

(6) に従って，元 $\xi \in S^2 \bigwedge^2 \rho$ を

$$\xi = \alpha_0 + \alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 + \gamma,$$

$$\alpha_0 \in I \otimes 1,\ \alpha_1 \in S_0^2\rho_1 \otimes 1,\ \beta_0 \in 1 \otimes I,\ \beta_1 \in 1 \otimes S_0^2\rho_1,\ \gamma \in S_0^2\rho$$

と書く．$I \otimes 1$ と $1 \otimes I$ は 1 次元表現だから，α_0 と β_0 は数 a, b によって与えられる．いわゆるビアンキの恒等式とは，リーマン多様体の曲率テンソルに対して常に $a = b$ であることを示すものである．$12a = 12b$ を**スカラー曲率**と言い，（トレース 0 の）対称行列 γ を**トレース 0 のリッチ曲率テンソル**と言い，α_1, β_1 を**正と負のワイル曲率テンソル**と言う．

例 9. 群 $SU(2)$ **の既約表現．** 群 $SU(2)$ はトートロジー表現

$$\rho : SU(2) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2) = \mathrm{Aut}(L)$$

を持つ．

定理 IV (4) に従えば，このことから，この群のすべての既約表現は，任意個の ρ と $\hat{\rho}$ のテンソル積で得られることがわかる．表現 $\hat{\rho}$ は単に ρ の複素共役と同値で，今の場合 ρ 自身と同値である．実際，$\dim L = 2$ の時は，空間 $\bigwedge^2 L$ は 1 次元で，$\bigwedge^2 L$ の基底 ω_0 を選べば，L 上の双線形形式 φ は $x \wedge y = \varphi(x, y)\omega_0$ によって与えられ，これにより L とその双対空間 L^* との同型が得られる．一方，L 上のエルミート構造（$SU(2)$ の定義に含まれている）は，L とそのエルミート共役 $\bar{L}^*$ との同型を与える．この 2 つの同型から，$\bar{L}^*$ と L^* が同型であり，それゆえ L と $\overline{L}$ が同型であり，それゆえ ρ と $\hat{\rho}$ が同値である．

こうして，$SU(2)$ のすべての既約表現は，表現 $T^p(\rho)$ の分解だけから得られることになる．一連の表現がすぐに思い浮かぶ．2 次のユニタリ行列は（または，任意の 2 次の行列であっても），2 変数 x, y の変換行列と考えることができるから，そのようにして，x, y に関して n 次の斉次多項式の空間の上にも作用する．つまり，

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : F(x, y) \mapsto F(\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y)$$

と作用する．この $n+1$ 次元の表現は，量子力学から起こった伝統（アイソトピック・スピンの理論，後出の §18E 参照）に従って，ρ_j，$j = \dfrac{n}{2}$ と書かれる．明らかに $\rho_j = S^{2j}\rho$ である．もし斉次多項式 $F(x, y)$ を非斉次多項式 $f(z) = F(z, 1)$ に移行させれば，表現 ρ_j は

$$f(z) \mapsto (\gamma z + \delta)^n f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \tag{7}$$

と書かれる．表現 ρ_j が既約であることを確かめるのは難しくない（このことは §17C で完全に明らかにされる）．$j = \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, \ldots$ に対する ρ_j が群 $SU(2)$ の既約表現のすべてであることを証明するためには，上で述べたことから，表現 $T^p(\rho)$ が表現 ρ_j たちの和に分解することを確かめるだけでよい．ρ 自身は $\rho_{1/2}$ だから，帰納法により，$\rho_j \otimes \rho_{j'}$ が表現 ρ_k の和に分解されることを証明すればよい．対角行列からなる $SU(2)$ の部分群 H を考えると，この分解に対する規則を推測することができる．この群は

$$g_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \qquad (|\alpha| = 1) \tag{8}$$

である．H はアーベル群なので，これに制限すれば，ρ_j は 1 次元表現に分解する．実際，(形式の空間に実現すると) 1 次元の不変部分空間の基底が，単項式

$$x^n,\ x^{n-1}y,\ \dots,\ y^n \tag{9}$$

で与えられ，その上に指標 $\chi_n(g_\alpha) = \alpha^n, \chi_{n-2}(g_\alpha) = \alpha^{n-2}, \dots, \chi_{-n}(g_\alpha) = \alpha^{-n}$ が作用する．表現 $\rho_j \otimes \rho_{j'}$ の H への制限を分解すると，表現 ρ_j, $\rho_{j'}$ の H への制限に現れる指標の対の積が得られる．つまり，指標 $\chi_{n+n'}$ は 1 回（ここで $n = 2j$, $n' = 2j'$），$\chi_{n+n'-2}$ は 2 回，$\chi_{n+n'-4}$ は 3 回，などとなる．このことから容易に，$\rho_j \otimes \rho_{j'}$ が表現 ρ_k の和に分解するなら，この分解は

$$\rho_j \otimes \rho_{j'} = \rho_{j+j'} \oplus \rho_{j+j'-2} \oplus \cdots \oplus \rho_{|j-j'|} \tag{10}$$

という形しかあり得ないことがわかる．

関係式 (10) を証明するために，定理 IV (3) という性質，つまり，表現がそのトレースによって一意的に決定されるということを使うことができる．ユニタリ行列は常に対角化可能で，それゆえ (8) の形の行列に共役であり，それゆえ**表現の指標**はこのような行列で与えられるものによって定まることに注意すればよい．特に，表現 ρ_j に対しては簡単に（基底 (9) での g_α の作用の記述を使って）

$$\chi_j(g_\alpha) = \chi_j(\alpha) = \frac{\alpha^{2j+1} - \alpha^{-(2j+1)}}{\alpha - \alpha^{-1}} \tag{11}$$

と求めることができる．今や (10) 式は

$$\chi_j(\alpha)\chi_{j'}(\alpha) = \chi_{j+j'}(\alpha) + \chi_{j+j'-2}(\alpha) + \cdots + \chi_{|j-j'|}(\alpha)$$

という簡単な式に帰着するが，この式は容易に確かめられる．こうして群 $SU(2)$ の既約表現が求まり，(10) 式が証明された．これを**クレブシュ–ゴルダンの公式**と言う．

$SO(3) \cong SU(2)/(+1,-1)$ なので，$SO(3)$ の既約表現は $SU(2)$ の既約表現に含まれる．それらは，行列 $-E$ が自明に作用するものになっている．

明らかに，このことが起こるのはまさに j が整数のときである．(11) 式からこれらの表現の指標公式が得られる．つまり，角 φ の回転 g_φ に対しては

$$\chi_j(g_\varphi) = \frac{\sin(2j+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

となる．

興味深いことに，これまで使ってきた可換な部分群（$SO(3)$ の場合はある軸の周りの回転のなす群）に制限するという方法を，量子力学的に説明することができる．中心対称な場に1つの電子があったとする．この対称性は，ハミルトニアンが $SO(3)$ の作用に関して不変であるという条件として反映する．すると，状態空間も $SO(3)$ の作用に関して不変にならねばならず，それゆえ $SO(3)$ の既約表現の直和に分解しなければならない．状態空間に現れる既約な部分空間は，2つの数によって定まる．その1つ（方位量子数）は j であり，対応する既約表現のタイプを定め，もう1つ（主量子数）は対応する同値な表現の異なる不変部分空間を区別するものである．この際，1つの既約部分空間に現れるすべての状態は，同じエネルギー・レベルを持っていなければならない．

1つの軸の周りの回転対称性を持つ磁場を始動させれば，群 $SO(3)$ の各既約表現は，磁場の対称軸の周りの回転のなす部分群 $H \subset SO(3)$ へ制限される．$SO(3)$ の既約表現の H への制限は，すでに見たように，1次元既約表現に分解され，部分群 H に関する異なる不変部分空間に対応する状態は，すでに異なるエネルギー・レベルを持つことになる．これが，磁場におけるスペクトル線の分解，つまり**ゼーマン効果**を記述している．たとえば，F.J. ダイソンの論文 [37] から引用した図 39 は，群 $SO(3)$ の表現 ρ_1 に従う変換をうける，金属ニオブの原子の状態空間が，磁場の始動後，それが群 H の3つの表現に分裂したことを示す，スペクトル写真である．

C. 複素古典リー群の表現

以下では，古典群の解析的な表現を考える．つまり，線形変換 $\rho(g)$ の行列の成分が，行列 $g \in G$ の成分の複素解析関数であるとするのである．§15 で述べた，複素古典リー群とコンパクト・リー群との間の関係を使おう．コ

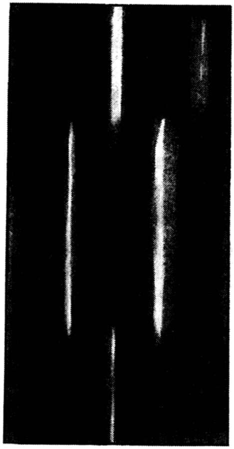


図 39

ンパクトな古典的群は，それぞれある複素古典リー群に極大コンパクト部分群として含まれている．たとえば，$GL(n,\mathbb{C})$ の中の $U(n)$，$SL(n,\mathbb{C})$ の中の $SU(n)$，$Sp(n,\mathbb{C})$ の中の $SpU(n)$ などである．この関係によって，前項で得られたコンパクト群の表現に関する情報から始めて，複素群の有限次元表現を研究することが可能になる．最初の主要な結果は次の定理である．

定理 V．複素古典リー群の有限次元表現は半単純である．

群 $GL(n)$ を例にして，証明のアイデアを説明しよう．簡単にするため，仮定を 1 つしよう．表現 $\rho : GL(n) \to \mathrm{Aut}(L)$ において，変換行列 $\rho(g)$ の成分 $r_{ij}(g)$ が行列 g の成分の有理関数であると仮定する（実際このことは，群 $GL(n)$ ばかりでなくすべての古典群に対しては常に成り立っている）．空間 L に，すべての変換 $\rho(g)$ $(g \in GL(n))$ に関して不変な部分空間 M があるとする．すでに証明したことから，群 $U(n)$ の表現は半単純であり，すべての $\rho(g)$ $(g \in U(n))$ に関して不変な部分空間 N で，$L = M \oplus N$ であるようなものが存在する．部分空間 M と N の基底を合わせて得られる基底では，変換 $\rho(g)$ $(g \in GL(n))$ は

$$\begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

という形の行列になる．ここで，行列 $C(g)$ の成分 $c_{ij}(g)$ は，上の仮定により，行列 g の成分の有理関数であり，$g \in U(n)$ に対しては 0 になる．したがって，すべてのことは，表現論とは無関係な次の補題の証明に帰着する．

補題．行列 $Z \in GL(n)$ の成分の有理関数である関数 $F(Z)$ が，すべての $Z \in U(n)$ に対して 0 であれば，恒等的に 0 である．

よく知られているように（そして直ちに確かめることができるが），$\det(E+Z) \neq 0$ を満たす任意の行列 Z は

$$Z = (E-T)(E+T)^{-1}$$

と書くことができ[5]，このとき，Z がユニタリであることと $T^* = -T$ とは同値である．$F(Z) = G(T)$ と置く．すると上の問題は，歪エルミート行列の上で 0 であるような，行列 T の成分の有理関数 $G(T)$ が恒等的に 0 であることを証明することに帰着される．$T = X + iY$ と置く．条件 $T^* = -T$ は ${}^tX = -X$, ${}^tY = Y$ という形になる．ここで t は転置行列を表わしている．問題の関数は，歪対称行列 X の成分 x_{ij} $(i < j)$ と，対称行列 Y の成分 y_{ij} $(i \leq j)$ を実の独立変数とする，有理関数になる．有理関数が変数のすべての実数値に対して 0 なのだから，恒等的に 0 であり，つまり，${}^tX = -X$, ${}^tY = Y$ を満たす任意の複素行列 X, Y に対して $T = X + iY$ の形のすべての T に対して $G(T) = 0$ である．しかし，任意の行列 T は，

$$X = \frac{1}{2}(T - {}^tT), \qquad Y = \frac{1}{2i}(T + {}^tT)$$

と置けば，この形に表わすことができる．

定理 V の証明は，複素古典リー群の表現を研究する一般的方法の 1 例に過ぎない．この方法は，実関数を複素領域に解析接続することのアナロジーで，**ユニタリ・トリック**と呼ばれる．このような群 G の表現をその極大コンパクト部分群 K に制限すると，群 K の表現が得られる．逆に，群 K の表現か

[5] ［訳註］もちろん，$T = (E+Z)^{-1}(E-Z)$ とおけばよい．

らは，行列 $k \in K$ が依存している実数のパラメータに複素数値をとらせれば，群 G の表現が得られる．

こうして，群 G の表現と K の表現の間に，1 対 1 対応が得られる．たとえば，群 $SL(2,\mathbb{C})$ の既約表現は (7) 式とまったく同じ式に書かれるが，ただ 1 つ，行列 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ の成分が $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ を満たす任意の複素数を値とすることが異なっている．(このことからとりわけ，これらの既約性がわかる.) $SL(2,\mathbb{C})$ とローレンツ群の間の関係があるので，物理学者にとってこの記述は重要である．

これまでに述べてきたことから，複素古典リー群の表現論が，コンパクト群の表現論と完全に類似なものであるという印象を受けたかも知れない．実際には，これからほど遠いものなのである．どんな非コンパクト・リー群の表現論にも，何らかの完全に新しい現象が結びついている．

コンパクトな場合と同じように，群 G 上に n 次元の不変微分形式が存在し（$n = \dim G$），それを使って空間 $L^2(G)$ 上に正則表現を定義することができる．正則表現はまた「既約表現に分解される」が，今度は分解の意味が異なっている．既約表現は一般に無限次元で，連続的に変化するパラメータに依存するので，ここで起こる状況は「連続スペクトル」型のものになる．正則表現の分解も，既約表現の和ではなく「積分」としてのものになる．たとえば，実数の加法群 $\mathbb{R}$ の指標は

$$\chi_\lambda(x) = e^{2\pi i \lambda x} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

という形になり，正則表現の「分解」は関数のフーリエ積分表示に帰着する（コンパクト群 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ の場合のように，フーリエ級数とはならない）．正則表現自身も，その分解の成分の既約表現のように，ユニタリである．このことから，多くの場合これらの表現が有限次元になり得ないことがわかる．たとえば，G が単純群なら，恒等表現でない表現は埋め込みになっていなければならないが，群 G が非コンパクトで $U(n)$ がコンパクトだから，G がある群 $U(n)$ に埋め込まれることはあり得ない．原則として，すべての既約ユニタリ表現が正則表現の分解に現れるわけではない．しかし，分解に現れるものでも，部分表現として正則表現に含まれるわけではない．これは，作用

素の連続スペクトルの1点がどんな固有ベクトルにも対応しないのと同じことである．既約表現が正則表現に含まれるという例外的な場合は非常に興味深く，スペクトルの離散部分のアナロジーになっている．このようなものとしては，たとえば群 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現で（$n \geq 0$ に対して），上半（もしくは下半）平面上の解析関数 $f(z)$ の集合に，

$$(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{C}^+} f_1(z)\,\overline{f_2(z)}\,y^n dx \wedge dy \qquad (z = x + iy)$$

という内積を入れた空間の上に，

$$T_g(f)(z) = (\gamma z + \delta)^{-n-2} f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right), \qquad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

という式で働くものがある．この構成そのものが，保形関数の理論との関係を示唆している．

§ 18.　群の応用

A. ガロア理論

ガロア理論では，有限拡大の「対称性」，つまり自己同型が研究される．有限拡大の定義とその簡単な性質については，§6 を参照のこと．簡単のために，考える体の標数は 0 であると仮定しよう．実際には，すべての基本的な結果はずっと広い一般性を持ち，たとえば有限体に対しても成り立っている．

あらゆる有限拡大 L/K は（体の標数が 0 であるという仮定のもとで）$K(\alpha)$ という形をしている．ここで，α はある既約多項式 $P(t) \in K[t]$ の根であり，この多項式の次数は $[L:K]$ に等しい．それゆえ，(ガロア自身がそうしたように）ガロア理論は多項式の言葉で述べることができるが，異なる多項式 $P(t)$ が同じ拡大 L/K を与え得るという意味で，そのような記述は不変なものではない．

拡大 L/K の自己同型 σ とは，体 L の自己同型であって，体 K のすべての元を固定するもののことである．与えられた拡大のすべての自己同型は，合成によって群 $\mathrm{Aut}(L/K)$ をなす．拡大 $K(\alpha)/K$ の自己同型 σ は，元 α をどこに写すかによって一意的に定まる．つまり，体 $K(\alpha)$ の任意の元は $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i\,\alpha^i$ $(a_i \in K)$ という形に書かれ，もし $\sigma(\alpha) = \beta$ ならば $\sigma(\sum a_i\,\alpha^i) = \sum a_i\,\beta^i$ となる．一方，$\sigma(\alpha) = \beta$ かつ $P(\alpha) = 0$, $P(t) \in K[t]$ であれば，$P(\beta) = 0$ となる．それゆえ，

$$|\mathrm{Aut}(L/K)| \leq \deg P(t) = [L:K] \tag{1}$$

である．群 $\mathrm{Aut}(L/K)$ が大きいほど，拡大 L/K は対称性が高い．(1) で等号が成り立つ，つまり

$$|\mathrm{Aut}(L/K)| = [L:K]$$

が成り立つという極限の場合に，拡大 L/K を**ガロア拡大**と言う．上に述べたことから，このことが起きるには，($L=K(\alpha)$ なら) α を根に持つ既約多項式 $P(t)$ が L 上で 1 次式の積に分解する必要がある．これがまた十分条件でもあることを証明することができる．§12 で，ガロア拡大でないだけでなく，$\mathrm{Aut}(L/K)=\{e\}$ という意味で「最大限に非対称的」でさえある拡大の例を与えた．そうは言ってもガロア拡大が十分完全な情報を与えるということに基づけば，体の構造に群論を適用できる可能性がある．

定理 I.　有限拡大はあるガロア拡大に含まれる．

与えられた拡大 L/K を含むガロア拡大 $\bar{L}/K$ を構成するレシピは，複雑なものではない．$L=K(\alpha)$, $P(\alpha)=0$, $P(t)\in K[t]$ であれば，L において多項式を $P(t)=(t-\alpha)P_1(t)$, $P_1(t)\in L[t]$ と置き，拡大 $L_1=L(\alpha_1)$, $P_1(\alpha_1)=0$ を構成し，$P(t)$ が 1 次式の積に分解されない間この手続きを続けなければいけない．与えられた拡大 L/K を含むすべてのガロア拡大 $\bar{L}/K$ の中には，他のすべてに含まれる極小のものが存在する．

群 $\mathrm{Aut}(L/K)$ をガロア拡大 L/K の**ガロア群**と言い，$\mathrm{Gal}(L/K)$ と書く．定義から

$$|\mathrm{Gal}(L/K)|=[L:K]$$

である．

有限拡大 L/K **のガロア群**と呼ばれるのは，L/K を含む最小のガロア拡大 $\bar{L}/K$ のガロア群のことであり，**既約多項式** $P(t)\in K[t]$ **のガロア群**と呼ばれるのは，拡大 $L/K=K(\alpha)$, $P(\alpha)=0$ のガロア群のことである．

$L=K(\alpha)$, $P(\alpha)=0$ であれば，L/K を含む最小のガロア拡大 $\bar{L}/K$ は，上のようにして多項式 $P(t)$ の根を K に次々と添加して得られる．任意の自己同型 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$ は，$P(t)$ の根 α_i がどんな元に写されるかによって定まる．一方，それらは同じ多項式の根にしか写り得ない．それゆえ，σ は多項式 $P(t)$ の根の置換を引き起こし，群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 全体は**この根の集合の上に作用**している．たとえば，§12 で考察した「非対称的な」拡大 $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ に対しては，$\alpha=\sqrt[3]{2}$, $P(t)=t^3-2=(t-\alpha)(t^2+\alpha t+\alpha^2)$ であるが，多項式 $t^2+\alpha t+\alpha^2$ は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ に根を持たない．$\bar{L}=L(\alpha_1)$, $\alpha_1^2+\alpha\alpha_1+\alpha^2=0$ と置

くと，これから $\alpha_1 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\alpha$ となる．このことから $\bar{L} = L(\sqrt{-3})$ であり，$\bar{L}$ の任意の元が $\xi + \eta\sqrt{-3}$, $\xi, \eta \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ と書くことができることになる．明らかに，自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\bar{L}/\mathbb{Q})$ は $\sigma(\sqrt[3]{2})$ と $\sigma(\sqrt{-3})$ の値によって定まる．この際，$(\sigma(\sqrt[3]{2}))^3 = 2$ であることから，

$$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \varepsilon^k \sqrt[3]{2} \quad (k = 0, 1, 2)$$

となる．ここで，$\varepsilon = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ は 1 の 3 乗根である．また，

$$\sigma(\sqrt{-3}) = \pm\sqrt{-3}$$

である．$\sigma(\sqrt[3]{2})$ と $\sigma(\sqrt{-3})$ に対するこれらの値の任意の組み合わせが，実際に $\bar{L}/\mathbb{Q}$ の自己同型を定めることは容易に確かめられるので，それゆえ $|\mathrm{Aut}(\bar{L}/\mathbb{Q})| = 6$ であり，$[\bar{L}, \mathbb{Q}] = 6$ だから $\bar{L}/\mathbb{Q}$ はガロア拡大である．そのガロア群は多項式 $t^3 - 2$ の根の上に作用し，明らかにそのすべての置換を与えているので，この場合 $\mathrm{Gal}(\bar{L}/\mathbb{Q}) \cong \mathfrak{S}_3$ である．群 $\mathrm{Gal}(\bar{L}/\mathbb{Q})$ の $t^3 - 2$ の根上の作用を，具体的に表の形で書いてみよう（根を $\sqrt[3]{2}, \varepsilon\sqrt[3]{2}, \varepsilon^2\sqrt[3]{2}$ の順に並べておく）．

$\sigma(\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\varepsilon\sqrt[3]{2}$	$\varepsilon\sqrt[3]{2}$	$\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$	$\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$
$\sigma(\sqrt{-3})$	$\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-3}$	$\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-3}$	$\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-3}$
根の置換	(1)	(23)	(123)	(12)	(132)	(13)

ガロア理論の基礎に，ガロア拡大 L/K の部分拡大 $K \subset L' \subset L$ とガロア群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群との間の注目すべき関係がある．任意の部分群 $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ に対して，部分群 H に属すすべての自己同型に関して不変な L の元全体からなる L の部分体を $L(H)$ と書く．そして，部分体 L', $K \subset L' \subset L$ 対して，群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群 $\mathrm{Aut}(L/L')$ を $G(L')$ と書く．

定理 II. ガロア理論の基本定理．写像 $H \mapsto L(H)$ と $L' \mapsto G(L')$ は互いに逆になっており，部分群 $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ と部分体 L', $K \subset L' \subset L$ との間の 1 対 1 対応を定める．この対応は包含関係を逆にする．つまり，$H \subset H_1$ と $L(H_1) \subset L(H)$ が同値になる．さらに，$[L(H) : K] = [G : H]$ である．

$K \subset L' \subset L$ に対して，L'/K がガロア拡大であることと，$G(L') \subset G$ が正規部分群であることが同値である．この場合，$\mathrm{Gal}(L'/K) \cong G/G(L')$ である．

ガロア理論の方法の古典的な説明は，**方程式をベキ根で解く**という問題への応用で行われる．ここで基本的なのは，ベキ根 $\sqrt[n]{a}$ の自然な説明がガロア理論において可能になったことである．

基礎体 K が1のすべての n 乗根を含み，つまり，多項式 x^n-1 が1次式の積に分解し，さらに多項式 x^n-a が既約であり，それゆえ $[K(\sqrt[n]{a}):K]=n$ であると仮定する．これまでの議論から，この場合 $K(\sqrt[n]{a})/K$ はガロア拡大で，そのすべての自己同型 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\sqrt[n]{a})/K)=G$ は，$\sigma(\sqrt[n]{a})=\varepsilon\sqrt[n]{a}$, $\varepsilon^n=1$ によって定まることがわかる．言い換えれば，$\sigma(\sqrt[n]{a})/\sqrt[n]{a}=\chi(\sigma)$ とおけば，群 G の指標が得られ，この指標は忠実（つまり，核が $\{e\}$）なので，G は巡回群である．K 上のベクトル空間として体 $K(\sqrt[n]{a})$ は G の表現を定めるが，これは1次元表現に分解されることになる．実際，

$$K(\sqrt[n]{a})=K\oplus K\sqrt[n]{a}\oplus K\sqrt[n]{a^2}\oplus\cdots\oplus K\sqrt[n]{a^{n-1}}$$

である．ここで，$\sigma(\sqrt[n]{a^r})=\chi^r(\sigma)\ \sqrt[n]{a^r}$ である．こうしてベキ根 $\sqrt[n]{a^r}$ は，巡回群 G の L 上の表現の1次元表現への分解に対応している．この見方は逆転することができる．L/K を，位数 n の巡回群 G をガロア群とする拡大とすれば，上と同じようにして，

$$L=K\alpha_1\oplus\cdots\oplus K\alpha_n \qquad (\sigma(\alpha_r)=\chi^r(\sigma)\ \alpha_r)$$

となることになる．ここで，$\chi(\sigma)$ は群 G の指標群を生成する指標である．このことから，$\alpha_r=\alpha_1^r c_r$, $c_r\in K$, $\alpha_1\in L$, $\alpha_1^n=a\in K$ であること，それゆえ $L=K(\sqrt[n]{a})$ であるを導くのは難しくない．

こうして，1のすべての n 乗根が体 K に含まれていれば，**ベキ根を添加した体 $K(\sqrt[n]{a})$ は，巡回群をガロア群とする拡大になる**．このことから，定理IIと可解群の非常に簡単な性質を使えば，次の定理を証明することができる．

定理 III. **拡大 L/K が次々にベキ根をつけ加えて得られる拡大体 Λ/K に含まれる（つまり，**

$$\Lambda = \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \cdots \supset \Lambda_r = K, \quad \Lambda_{i-1} = \Lambda_i(\sqrt[n_i]{\lambda_i}) \quad (\lambda_i \in \Lambda_i)$$

となる）ことは，そのガロア群が可解群であることと同値である．

この事実が可解群の概念に導いたのであり，その名前の由来でもある．

たとえば，有理関数体 $k(t_1, \ldots, t_n) = L$ と対称関数の作る部分体 K を考えよう．よく知られているように，σ_i を基本対称関数とすると，$K = k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ であり，$\sigma_i \mapsto y_i$ という対応によって $k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ と $k(y_1, \ldots, y_n)$ との同型が得られる．明らかに，$\mathrm{Gal}(L/K) = \mathfrak{S}_n$ であり，$t_1, \ldots, t_n$ のすべての置換からなっている．しかし，t_i は方程式 $x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots \pm \sigma_n = 0$ の根である．同型 $\sigma_i \mapsto y_i$ を働かせると，$y_1, \ldots, y_n$ を独立変数として，方程式

$$x^n - y_1 x^{n-1} + \cdots \pm y_n = 0 \tag{2}$$

の体 $k(y_1, \ldots, y_n)$ 上のガロア群は対称群 $\mathfrak{S}_n$ であると言うことができる．

方程式 (2) は，n 次の一般方程式と呼ばれている．

定理 III の判定条件と，群 $\mathfrak{S}_n$ の構造についてのよく知られた事実（§13 定理 I）を合わせると，次の定理が得られる．

定理 IV. n 次の一般方程式は，$n = 2,\ 3,\ 4$ に対してはベキ根で解くことができるが，$n \geq 5$ に対しては解くことができない．

$n = 2,\ 3,\ 4$ 次の方程式をベキ根で解く公式の構造もまた，群 $\mathfrak{S}_n$, $n = 2,\ 3,\ 4$ の性質から予想することが可能である（§13 定理 I 参照）．

B. 線形微分方程式のガロア理論（ピカール–ヴェシオ理論）

ある領域で有理形である 1 複素変数関数を係数とする微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{3}$$

を考える．体 $\mathbb{C}(a_1, \ldots, a_n)$ を K と書き，$a_1, \ldots, a_n$ のすべての有理関数と，(3) の n 個の 1 次独立な解と，解のすべての導関数の作る体を L と書く．

拡大 L/K の**微分自己同型**とは，体 K の元を固定し，体 L の元の微分と可換であるような L の自己同型のことである．

拡大 L/K のすべての微分自己同型のなす群は，この拡大 L/K の，または方程式 (3) の**微分ガロア群**と言われる．

微分自己同型は，微分と交換し (3) の係数を変えないので，この方程式の解をまた解に写す．方程式 (3) の解は n 次元ベクトル空間をなすので，方程式 (3) の微分ガロア群は $GL(n, \mathbb{C})$ のある部分群に同型である．この部分群が代数的な行列群（§15 参照）であることを示すことができる．このようにして，有限拡大を上で考察したタイプの微分拡大で置き換え，有限群を代数群で置き換える，ガロア理論の変形が生まれる．ここでもまた,「ガロア理論の基本定理」の完全なアナロジーが成り立つ．ベキ根による可解性のアナロジーは**求積法による可解性**になる．たとえば，$y = \int a(x)\, dx$ は方程式 $y'' - (a'/a)y' = 0$ の解である．この場合，微分自己同型は $y \mapsto y + c,\ c \in \mathbb{C}$ という形をしており，つまり，ガロア群は $\mathbb{G}_a$（体 K の元の加法群，§15 参照）に同型になる．関数 $y = e^{\int a dx}$ は方程式 $y' - ay = 0$ の解である．この微分自己同型は $y \mapsto cy,\ c \in \mathbb{C}^*$ という形のもので，微分ガロア群は $\mathbb{G}_m$（体 K の元の乗法群，§15 参照）に同型である．

古典的なガロア理論と類似な定理が成り立つ．

定理 V．方程式 (3) の解がその係数を使って，四則演算と，積分すること，積分の指数関数をとること，代数方程式を解くことによって表わすことができることと，その微分ガロア群が，商群が群 $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{G}_m$, 有限群のどれかであるような正規列[1]を持つことが必要かつ十分である．

たとえば，方程式 $y'' + xy = 0$ のガロア群を求めるのは難しくない．それは $SL(2, \mathbb{C})$ と一致する．この群は唯一の正規部分群として $\{\pm E\}$ を持ち，商群 $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\{\pm E\}$ は単純群なので，方程式 $y'' + xy = 0$ は求積法で解くことはできない．

---

[1] ［訳註］部分群の列で，常に 1 つ前の群の正規部分群になっているようなもののこと．ガロア拡大に対応している．

C. 不分岐被覆の分類

X を連結な多様体とし，$x_0 \in X$ として，$G = \pi(X, x_0)$ を X の基本群とする．基点 $y_0 \in Y$ つきの多様体 Y と連続写像 $p: Y \to X$, $p(y_0) = x_0$ が**有限次不分岐被覆**であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，ある近傍 U がとれて，その原像 $p^{-1}(U)$ が n 個の互いに交わらない開集合 U_i に分かれ，各 i に対して $p: U_i \to U$ が同相写像になっているときに言う．この数 n はすべての点 x に対して同じになり，x の原像の数に等しく，この**被覆の次数**と言われる．

写像 $p: Y \to X$ は，自然に準同型 $p_*: \pi(Y, y_0) \to \pi(X, x_0)$ を定義する．これは，ループを定める写像 $\varphi: I \to Y$ に p を合成するものである．その像を $G(Y)$ と書くとき，ガロア理論の基本定理の次のようなアナロジーが成り立つ．

定理 VI. 写像 $(Y, y_0) \mapsto G(Y)$ は，連結な有限次不分岐被覆と群 G の有限指数の部分群との間の **1** 対 **1** 対応を定める．被覆 $(Y, y_0) \to (X, x_0)$ の次数は指数 $[G : G(Y)]$ に等しい．不分岐被覆の鎖 $(Z, z_0) \to (Y, y_0) \to (X, x_0)$ は部分群の包含関係 $G(Z) \subset G(Y)$ に対応する．もし $G(Y)$ が G の正規部分群であれば，商群 $F = G/G(Y)$ は Y 上に作用するが，その作用は固定点を持たず，X の点の原像を置換し，$X = F\backslash Y$ となる．

ガロア理論の基本定理とのアナロジーがこんなに強いので，何らかの直接的な関係を打ち立ててみたいという欲求が生まれる．場合によっては，これは実際に可能である．多様体 X を複素数体上の代数多様体とし，$p: Y \to X$ を不分岐被覆とする．不分岐被覆の定義によって存在している，開集合 $U_i \subset Y$ と $U \subset X$ の間の局所的な同相写像 $p: U_i \to U$ を使って（これは不分岐被覆の定義から存在している），X 上の複素構造を Y 上に移すことができる．こうして，Y は一意的に定義された複素解析多様体の構造を持つ．この構造により，Y はある代数多様体に同型であることを示すことができる．これは §6 の最後に考察したのと類似な状況である．X と Y が既約であれば，写像 $p: Y \to X$ は有理関数体の写像 $p^*: \mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}(Y)$ に対応し，p^* は体の準

同型で，つまり体の埋め込みになっている．こうして $\mathbb{C}(X) \subset \mathbb{C}(Y)$ となる．これが有限次拡大であり，その際 $[\mathbb{C}(Y) : \mathbb{C}(X)] = [G : G(Y)]$ であることを示すことができる．群 G が体 $\mathbb{C}(X)$ のある有限拡大の記述を与えることがわかる．しかしながら，これらは $\mathbb{C}(X)$ のすべての有限拡大ではなく,「不分岐」なものだけである．一般の有限拡大 $L/\mathbb{C}(X)$ もまた $L = \mathbb{C}(Y)$ の形をしており，ここで Y は代数多様体で，体の包含写像 $\mathbb{C}(X) \subset \mathbb{C}(Y)$ を導く写像 $p : Y \to X$ が存在する．しかし一般には，写像 p はある部分多様体 $S \subset X$ の上で分岐している．すなわち，$x \in S$ に対して原像 $p^{-1}(x)$ の元の個数が拡大 $\mathbb{C}(Y)/\mathbb{C}(X)$ の次数より小さい．そのような拡大の記述は，群 $\pi(X \setminus S)$ を考えれば，同じような方法で得ることができる．

X がコンパクトで既約な複素代数曲線の場合，空間 X はある向きづけられた曲面と同相である．この曲面の種数が g であれば，群 $\pi(X)$ は $2g$ 個の生成元 $x_1, \dots, x_{2g}$ とただ 1 つの定義関係式

$$x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3 x_4 x_3^{-1} x_4^{-1} \dots x_{2g-1} x_{2g} x_{2g-1}^{-1} x_{2g}^{-1} = 1 \tag{4}$$

を持つ（§14 例 7 参照）．こうして，この具体的に定義された群の有限指数の部分群が，不分岐被覆 $Y \to X$ を記述する．

外見上似ている 1 つの結果を思い出しておく．K を p 進数体 $\mathbb{Q}_p$（§7 例 7）の有限拡大で，1 の p 乗根を含んでいるものとする．K は 1 の原始 p^e 乗根を含むが 1 の p^{e+1} 乗根を含まず，$p^e \neq 2$ であると仮定する．$n = [K : \mathbb{Q}_p]$ と置く．

定理 VII. **体 K の有限ガロア拡大 L/K で $[L : K]$ が p のベキであるものは，$n+2$ 個の生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+2}$ を持ち，**

$$\sigma_1^{p^e} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \dots \sigma_{n+1} \sigma_{n+2} \sigma_{n+1}^{-1} \sigma_{n+2}^{-1} = 1 \tag{5}$$

がただ 1 つの定義関係式であるような群の，指数が p ベキである正規部分群と 1 対 1 に対応する（n は必然的に偶数である）．

関係式 (5) と (4) が驚くほど似ているにも拘らず，この並行性の理由は明らかであるという状態からはほど遠い．

D. 不変式論

$G = GL(n, \mathbb{C})$ を n 次元ベクトル空間 L の線形変換全体の群とし，$T(L)$ を L 上のある定まった型のテンソル空間とする．この状況によって，群 G の空間 $T(L)$ における表現 $\varphi : G \to \mathrm{Aut}\,(T(L))$ が定義される．特に興味があるのは，空間 $T(L)$ 上定義された多項式関数 F で，群 G の作用に関して不変なものである．これらは（元 $g \in GL(n, \mathbb{C})$ を別の座標系への移行と考えれば），L の座標系の取り方によらない $T(L)$ のテンソルの内在的な性質を表わしている．この要請を幾分弱くした方が都合がよい．テンソルの内在的な性質は，群の元 g の作用で定数倍される，つまり，

$$\varphi(g)F = c(g)F \tag{6}$$

を満たすような，ある多項式が 0 になることとして表わされることが多い．$c(g)$ が g の行列式のあるベキになることは容易にわかり，等式 (6) は $\varphi(g)F = F$, $g \in SL(n, \mathbb{C})$ という条件と同値である．このような多項式を群 $SL(n, \mathbb{C})$ の**不変式**と言う．たとえば，$T(L) = S^2(L)$ が 2 次形式の空間であれば，2 次形式の判別式は不変式である．

以下では，$T(L) = S^m(L)$ が空間 L 上の m 次形式の空間であるという，最も簡単な場合を考える．m 次形式の係数からなる多項式の環 $A = \mathbb{C}[S^m(L)]$ は，不変式の作る部分環 B を含んでいる．不変式論の基本的な結果の 1 つを証明することで，群の表現論の基本的な事実の応用例を示そう．

定理 VIII．第 1 基本定理．不変式環は体 $\mathbb{C}$ 上有限生成である．

これは次の簡単な補題に基づいている．

補題．$I \subset B$ が不変式環のイデアルなら，$IA \cap B = I$ である．

証明は，多項式環が次数つき環 $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ であり，B も A の部分環として次数つきであるという事実に関係している（§6 定理 V 参照）．空間 A_i にはそれぞれ，群 $G = SL(n, \mathbb{C})$ の有限次元表現が定まっている．任意の元 $a \in A$ はある有限次元の不変部分空間 $\tilde{A} \subset A$ （たとえば $N = \deg a$

のときなら，$\bigoplus_{i \le N} A_i$）に含まれている．この群の表現は半単純だから（§17 定理 V），$\tilde{A}$ には直和分解 $\tilde{A} = \bar{A} \oplus \bar{B}$ があって，$\bar{A}$ は $\tilde{A}$ に現れる自明な表現と異なるすべての既約表現の和であり，$\bar{B} \subset B$ である．$a = b + \bar{a}, b \in B$, $\bar{a} \in \bar{A}$ と置く．$\bar{A}$ は G 不変な有限次元部分空間で，$\bar{A} \cap B = 0$ を満たす．$x \in IA$ を $x = \sum_\ell i_\ell a_\ell, i_\ell \in I, a_\ell \in A$ と書く．$\bar{A}_\ell$ を a_ℓ に対応する $\bar{A}$ の部分空間とし，$a_\ell = \bar{a}_\ell + b_\ell, \bar{a}_\ell \in \bar{A}_\ell, b_\ell \in B$ と置くと，$x = \sum i_\ell b_\ell + \sum i_\ell \bar{a}_\ell$ となる．しかし，$\sum i_\ell b_\ell \in I$ であり，$i_\ell \bar{A}_\ell$ は不変部分空間でその上に $\bar{A}_\ell$ と同型な表現が導かれる．それゆえ $\sum i_\ell \bar{a}_\ell \in \sum i_\ell \bar{A}_\ell$ である．半単純加群の基本的な性質（§10 定理 I 参照）から，加群 $\sum i_\ell \bar{A}_\ell$ は $i_\ell \bar{A}_\ell$ のどれかと同型な単純部分加群だけを含むことになる．特に，$(\sum i_\ell \bar{A}_\ell) \cap B = 0$ であり，$x \in B$ であれば $\sum i_\ell \bar{a}_\ell = 0$ かつ $x \in I$ である．これで補題が証明された．

今や基本定理は明らかになった．対応 $I \to IA$ は，環 B のイデアルの集合から環 A のイデアルの集合への写像であり，補題によれば異なるイデアルは異なるイデアルに対応する．しかしそのとき，多項式環 A のネーター性から B のネーター性が導かれる．次数つきネーター環は $B_0 = \mathbb{C}$ 上有限生成である（§6 定理 V 参照）．

まさにこの定理の証明のために，ヒルベルトは「ネーター性」の概念を導入し，多項式環の「ネーター性」を証明したのである．（性質の名前であるネーターは後になってエミー・ネーターに因んでつけられたのだが，ヒルベルトが不変式論に関する仕事を発表した当時彼女が幼児だったことを考えると，この命名は馬鹿げているように思えるかも知れない．）

E. 群の表現と素粒子の分類

この 20 年ほど，理論物理学者の一部では，これまでに大量に発見されてきた素粒子の謎めいた姿の統一的な見方を作り上げるために，リー群の表現論を使おうと，激しい熱狂的な試みがなされてきた．物理学で考察される 3 つの，電磁気的，弱い，強い，という相互作用のうちで，核力に関係した強い相互作用だけを問題にすることにする．強い相互作用に関係する粒子である

ハドロンは，メソン（中間子）とバリオン（重粒子）である．

§17 例 9 の説明の最後に与えた注意から始めよう．図 39 の 3 本のスペクトル線（物理学の用語での **3 重項**）は，群 $SO(3)$ に関する元々の対称性が，部分群 $H \cong SO(2)$ に制限するときに破れる結果として起きた．群 $SO(3)$ の 3 次元表現 ρ_1 の部分群 H への制限はもはや既約でなく，観測される線に対応する 3 つの 1 次元表現に分解する．この状況は，モデルとして，以下に述べるすべての考察の基礎になっている．同じような性質を持つ r 個の粒子の集合があれば，それを対称性の減少に関連した退化として表す試みが可能になる．数学的には，このことは，考えているすべての粒子の状態が，同じ 1 つの群 H が表現 $\rho_1, \ldots, \rho_r$ によって作用する空間 $L_1, \ldots, L_r$ をなすという事実に関係している．より大きな群 $G \supset H$ で，空間 $L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ に既約表現を持ち，この表現の部分群 H への制限が $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ になるようなものを探すのである．

第 1 の段階として，陽子 p と中性子 n からなる対を考える．陽子と中性子は同じスピンと（同じではないものの）非常に近い質量を持っている[2]．

$$\text{陽子の質量} = 938.2\ \text{MeV} = 1.6726 \times 10^{-24}\ \text{gm},$$
$$\text{中性子の質量} = 939.8\ \text{MeV} = 1.6749 \times 10^{-24}\ \text{gm}.$$

それらは異なる電荷を持っているが，その違いは，問題にしている理論では無視される電磁相互作用を考える際に現れるだけである．こうした文脈で，ハイゼンベルグはすでに 1930 年代に，陽子と中性子を 1 つの粒子である**核子**の 2 つの量子状態と考えることを提案している．これに対応して陽子と中性子を N^+ と N^0 と書き，核子を N と書く．量子力学の一般原理に従い，核子の状態空間としてエルミート計量を持つ 2 次元の複素空間 L を考える．N^+ と N^0 は L の基底に対応する．この空間の対称性は群 $U(2)$ をなす．以降，非常に似た性質を持つ部分群 $SU(2)$ を考えることにし，この制限を正当化する物理的な議論は省くことにする．多くの核子からなる系では，状態

---

[2] ［訳註］Particle Data Group の作成した 2000 年度版の *Reviews of Particle*（以下で 2000 年現在の値として引用するのはこの本の記述による）によれば，陽子の質量 $= 938.271998 \pm 0.000038$ MeV で，中性子の質量 $= 939.565330 \pm 0.000038$ MeV である．

なお，メガイブプシロンボルト MeV はエネルギーの単位であって，質量の単位としては MeV/c^2（c は光速度）であるべきであるが，誤解を生じない場合は c^2 を省略することが多い．また日本では質量の単位のグラムは単に g と書かれるが，ヨーロッパでは本書のように gm と書かれることもある．

空間は $L \otimes L \otimes \cdots \otimes L$ という形になり，群 $SU(2)$ はそこに作用する．この群の L 上の（トートロジー）表現は，(§17 例 9 で与えた分類のときに) $\rho_{1/2}$ と書いていたが，新しい状態空間での表現は $T^p(\rho_{1/2})$ となる．§17 例 9 によって，群 $SU(2)$ のすべての既約表現は ρ_j の形をしている．ここで $j \geq 0$ は整数か半奇数で，$\dim \rho_j = 2j+1$ である．さらに，クレブシュ–ゴルダンの公式（§17 (10)）によって，表現 $\rho_j \otimes \rho_{j'}$ を既約分解することができる．それゆえ，問題の表現 $T^p(\rho_{1/2})$ の既約分解がわかる．このことは多くの物理的な情報を与えてくれる．大事なことは，§1 例 1 の量子力学の辞書によれば，ベクトル φ で表わされる状態からベクトル ψ で表わされる状態へ遷移する確率が（$|\varphi| = |\psi| = 1$ とすると）$|(\varphi, \psi)|$ であるということである．しかし，表現の既約分解は常に直交していると考えることができ，これはつまり，異なる既約表現に従って変換するベクトルによって表わされる状態は互いに移り合うことができないことを意味する．これがいわゆる**禁制相互作用の法則**である．さらに，$T^p(\rho_{1/2})$ の分解に現れる既約表現 ρ_j の添え字 j の他に，これらの表現が実現される部分空間の実際の基底も書き下すことができる．つまり，行列 $T^p(\rho_{1/2}(g))$ を行列 $\rho_j(g)$ の直和に変換することができる．このことによって，系の異なる状態の間の遷移確率を求めることが可能になる．

ここで，他の素粒子の研究にも同じ考え方を適用することは自然である．素粒子が 2, 3, 4 といった数のグループをなし，1 つのグループの中では質量が非常に近いということがおこる（「1 重項の」粒子もあるのだが）．バリオンの中には，たとえば，すでに考察した核子以外にも，1 重項の Λ ハイペロン[3]（質量は 1115 MeV），Ξ 2 重項（質量が 1314 MeV と 1321 MeV の 2 つの粒子 Ξ^+ と Ξ^-）[4]，Σ 3 重項（質量が 1189 MeV, 1192 MeV, 1197 MeV の 3 つの粒子 $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$）[5]がある．同じことがメソンに対しても起こる．

---

[3] ［訳註］ハイペロンとは，奇妙さ（ストレンジネス）と呼ばれる量子数が 0 でないバリオンのこと．s（ストレンジ・）クォークを含むバリオンと言ってもよい．もっとも軽いものが Λ 粒子である．2000 年現在の質量は 1115.683 ± 0.006 MeV である．

[4] ［訳註］ここには誤解があるようである． Ξ^+ と Ξ^- は互いに反粒子であり，質量は同じ筈である．2 重項を組むのは Ξ^0 と Ξ^- で，2000 年現在の質量は，前者が 1314.83 ± 0.20 MeV で後者が 1321.31 ± 0.13 MeV である．

[5] ［訳註］2000 年現在の質量は，Σ^+ が 1189.37 ± 0.07 MeV，Σ^0 が 1192.642 ± 0.024 MeV，Σ^- が 1197.449 ± 0.030 MeV である．

η メソン，φ メソン，ω メソンという 3 つの 1 重項，K メソン 2 重項と K^* メソン 2 重項，そしてその反粒子の 2 重項，π メソンと ρ メソンの 3 重項がある．これらに同じアイデアを適用することは自然であろう．1 つのグループの粒子は同じ粒子の量子状態であり，その量子状態は，1 重項に対しては 1 次元，2 重項に対しては 2 次元，3 重項に対しては 3 次元で，群 $SU(2)$ の表現 $\rho_0, \rho_{1/2}, \rho_1$ に対応していると考えるのである．粒子が多い場合には，また表現のテンソル積を考えることになり，それはクレブシュ–ゴルダンの公式によって既約分解される．群 $SU(2)$ の既約表現 ρ_j に従って変換する状態にアイソスピン j を与える．群 $SU(2)$ の枠組みの中で行われるこれらの議論が，アイソトピック・スピンまたはアイソスピンの理論というものになる[6]．この理論は非常によく正当化されていて，たとえば π メソンの 3 重項の存在はこの理論をもとに予言され，後になって発見されたのである．

最も勇気あるステップが以下のように踏み出された．徹底的にやろうとすれば，すべてのバリオンに対して同じ議論を適用する必要がある．それらは 8 重項をなす．1 重項の Λ 粒子，2 重項の N 粒子と Ξ 粒子，3 重項の Σ 粒子である．それらの粒子の多様性は，ある高次の対称性が破れることだけから起こるものとしなければならない．物理学者は別の言い方をする．それに関してはすべての粒子が同じになってしまうような，理想的な「超」「強い」相互作用が存在するとするのである．数学者にとっては，これは次のような問題である．$SU(2)$ と同型な部分群 H を含むある群 G と，G のある 8 次元既約表現 ρ を探して，ρ の H への制限が,（Λ に対応する）ρ_0 と,（N に対応する）$\rho_{1/2}$ と,（Ξ に対応する）もう 1 つの $\rho_{1/2}$ と,（Σ に対応する）ρ_1 とに分解するようにする，という問題である．

そのような群と表現は実際に存在する．$G = SU(3)$ と，トレース 0 のすべての 3×3 行列の空間 $M_3^0(\mathbb{C})$ 上のその随伴表現である．ここで，行列 $g \in SU(3)$ は変換 $x \mapsto g^{-1}xg$, $x \in M_3^0(\mathbb{C})$ を定めている（$\dim_{\mathbb{C}} M_3(\mathbb{C}) = 9$ なので，$\dim_{\mathbb{C}} M_3^0(\mathbb{C}) = 8$ である）．この表現を行列の形に書き下そう．行

---

6 ［訳註］$SU(2)$ 対称性を基礎にした理論をアイソスピン理論と言ってよい．クォーク理論的には，比較的軽い u クォークと d クォークの質量が近く，他のクォークの質量と離れているために，u クォークと d クォーク以外の部分が同じとされる素粒子に対して，偶発的に現れた対称性と説明されている．2000 年現在，主張されている値は u クォークは 2.3 から 4.3 MeV，d クォークは 6.4 から 7.4 MeV の間である．ちなみに $p = uud$, $n = udd$, $\Lambda = uds$, $\Sigma^+ = uus$, $\Sigma^0 = uds$, $\Sigma^- = dds$, $\Xi^0 = uss$, $\Xi^- = dss$ と考えられている．

列 $x \in M_3(\mathbb{C})$ を

$$x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \alpha \end{pmatrix}$$

の形に書く．ここで，A は 2×2 行列，B は 2×1 行列，C は 1×2 行列で，α は数である．条件 $\mathrm{Tr}\, x = 0$ は $\alpha = -\mathrm{Tr}\, A$ を意味する．$SU(3)$ の中で，$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形の行列からなる部分群 H を考える．すると明らかに $U \in SU(2)$ であり，H は $SU(2)$ と同型である．

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1}AU & U^{-1}B \\ CU & \alpha \end{pmatrix}$$

となるので，行列のブロック A, B, C, α への分割は，随伴表現の，2 つの 2 次元表現と 4 次元表現への分解を与える．2 次元表現は明らかに $\rho_{1/2}$ に一致する．$M_2(\mathbb{C})$ はスカラー行列と，トレース 0 の行列に分解するので，この 4 次元表現は可約である．この結果，4 次元表現は，$\begin{pmatrix} -\alpha & & 0 \\ & -\alpha & \\ 0 & & 2\alpha \end{pmatrix}$ の形の行列からなる 1 次元表現と，$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathrm{Tr}\, A = 0$ の形の行列からなる 3 次元表現に分解する．これが欲しかった分解である．

群 $SU(3)$ の表現によって記述される理想化された状況から現実のバリオンに戻ることは，摂動論の問題である．発見的だが自然な考察に基づいて摂動されたハミルトニアンを書いてみると，答が 2 つの任意定数に依存するような状況になる．この 2 つの定数を適当に選ぶと，4 つのグループのバリオン (Λ, N, Ξ, Σ) に対する既知の質量のよい近似値が得られる．その上，同じアプローチがメソンに対しても適用できることがわかる．そこでは，擬スカラー・メソン（η メソン，K メソンとその反粒子，π メソン）[7]とベクトル・

7　[訳註] これらのメソンのクォーク表示 $\eta = \frac{u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{\sqrt{6}}$, $K^+ = u\bar{s}$, $K^- = s\bar{u}$, $K^0 = d\bar{s}$, $\bar{K}^0 = s\bar{d}$, $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^0 = \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$, $\pi^- = d\bar{u}$ は上の $SU(3)$ の表現の分解によく合っている．これも，比較的軽い u クォークと d クォークの質量が近く，他のクォークの質量と離れているために，u, d, s の 3 種のクォークが他のクォークに比べ格段に軽く，この 3 種のクォークに関係した素粒子に対して，偶発的に現れた対称性と説明されている．

メソン（φ メソン，K^* メソンとその反粒子，ρ メソン）[8]という 2 つの異なる 8 重項があり，それぞれ同じ表現論の問題に導く．

アイソトピック・スピンによって分類されるバリオンの別のグループを考えると，新しい状況が生まれる．これは Ξ^* ハイペロン 2 重項，Σ^* ハイペロン 3 重項，Δ^* ハイペロン 4 重項である．上に述べたイデオロギーに従うと，問題は，群 $SU(3)$ の 9 次元表現で，$SU(2)$ に制限すると $\rho_{1/2} \oplus \rho_1 \oplus \rho_{3/2}$ と分解するものを探すことである．そのような表現は存在しないが，$SU(3)$ の「近い」表現は存在する．それは $S^3\rho$，つまり，群 $SU(3)$ の 3 次元空間におけるトートロジー表現 ρ の 3 次の対称積である．ρ が変数 x, y, z の線形形式の空間に働いているとするなら，$S^3\rho$ は x, y, z に関する 3 次の斉次多項式のなす 10 次元空間 L に作用する．$SU(2)$ と同型な部分群 $H \subset SU(3)$ で，z を固定し，x, y には群 $SU(2)$ の 2 次元のトートロジー表現 $\rho_{1/2}$ によって作用するものを考えよう．そのとき，$L = L_3 \oplus L_2 z \oplus L_1 z^2 \oplus \mathbb{C}z^3$ という分解が得られる．ここで，L_i は x, y に関する i 次の斉次多項式の空間である ($\dim L_i = i + 1$)．（H に制限したときの表現 $S^3\rho$ の）分解

$$\rho_{3/2} \oplus \rho_1 \oplus \rho_{1/2} \oplus \rho_0$$

が得られる．これは求めていたものと，ρ_0 という直和因子だけ異なっている．この因子が，問題にしているバリオンの族に含まれる必要のある，さらに別の素粒子に対応しているという提案は，自然なことである．群論的な考察から，この素粒子のある性質，たとえば質量を予言することができる．このような素粒子が実際に発見された．それは Ω^- ハイペロンと呼ばれている．

最後に，群 $SU(3)$ の表現の一般的な性質を基にした，これらの議論のすべての意味付けを試みることができる．この群のすべての既約表現は，トートロジー表現 ρ とその反傾表現 $\hat{\rho}$ という 2 つの表現の任意のテンソル積の

ちなみに，s クォークの質量は 75 から 170 MeV である．c クォークの質量は 1.15 から 1.35 GeV である．b クォークの質量は 4.0 から 4.4 GeV である．t クォークは存在が最近確認され，他のクォークに比べて非常に重いことは分かっている．$\sim$ 170 GeV という推定値もあるが，まだ精確な値というほどではない．

[8] ［訳註］現在ではベクトル・メソンは，ω メソンを加えた 9 重項と考えるのが自然であると考えられている．u, d, s の 3 種のクォークのそれぞれにスピンも考慮に入れて，u↑, u↓, d↑, d↓, s↑, s↓ を基礎にすると $SU(6)$ 対称性が得られ，$M_6(\mathbb{C})$（次元は 36=6^2）を 1 重項（擬スカラー・メソンとしては非常に重い η'^0 に対応）と 35 重項（擬スカラー・メソン 8 重項とベクトル・メソン 9 重項に対応）に分解する．

既約分解の成分として得ることができること（§17 定理 IV(4)）がわかっている．($SU(2)$ とは違って，$SU(3)$ では $\hat{\rho}$ は ρ と同値でない.)

そこで,「この 2 つの基本的な表現はある“さらに基本的な”粒子に対応していないか？」という問題が生まれる．この仮想的な粒子は**クォーク**と**反クォーク**と呼ばれて，一連の実験によってその存在が支持されている．

しかしながら，おそらくは $SU(3)$ 理論の範囲を越えた，多くの非常に重要な問題が残されている．このために，たとえば $SU(6)$ のような別の群を導入することに基づいた対称性の理論も考えられている．この 20 年以上にもわたって，似たようなアイデアが広く展開されてきて，強い相互作用の領域の外側にも適用されている．しかし，この問題に関する著者の貧しい知識は，ここで終わりである．

§ 19.　リー代数と非結合的代数

A. リー代数

積の結合性以外の環のすべての性質を持つような，自然で重要な代数系が生まれたのは非常に古いのだが，これらの対象の代数的な性質はすぐには明らかにならなかった．§5 で，多様体上のベクトル場が，1 階の線形微分作用素 $\mathcal{D}(F) = \sum P_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$，つまり多様体上の関数環の微分であるという記述を与えた．環 A の微分とは，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(a+b) &= \mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b), \\
\mathcal{D}(ab) &= a\mathcal{D}(b) + \mathcal{D}(a)b, \\
\mathcal{D}(\alpha) &= 0 \qquad (\alpha \text{ は定数})
\end{aligned} \tag{1}
$$

を満たす写像 $\mathcal{D} : A \to A$ のことである．2 つの微分作用素の積 $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ はもちろんまた微分作用素だが，$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ が 1 階の作用素なら，その中に 2 階の導関数が現れるので $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ は 2 階の作用素である．(このことは定数係数の作用素に対しては特に明らかである．$\mathbb{R}\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right] \cong \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$ という同型を考えれば，単に，2 つの 1 次多項式の積は 2 次の多項式になるということである.) しかし，$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ の非常に重要な表示で，また 1 階の作用素になるものがある．それがいわゆる**交換子**

$$
[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1 \tag{2}
$$

である．交換子がまた 1 階の作用素であるという事実は，$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ を関数環の微分と考え，$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ が (1) を満たせば $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2]$ も (1) を満たすことを代入によって確かめるのが，一番わかりやすいだろう．座標を使うなら，$\mathcal{D}_1 = \sum P_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$，$\mathcal{D}_2 = \sum Q_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ であれば，

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \sum R_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad R_i = \sum_k \left(P_k \frac{\partial Q_i}{\partial x_k} - Q_k \frac{\partial P_i}{\partial x_k} \right) \tag{3}$$

となる．これから直接に $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2]$ が1階の作用素であることがわかるが，定義 (2) には不変な定義であること，つまり座標系 $x_1, \ldots, x_n$ の選び方によらないという利点がある．これは，表示 (3) からはすぐにはわからないことである．微分作用素として解釈することにより，ベクトル場に対しても交換子の演算を行うことができる．そこでは**ポアソン括弧**と呼ばれ，$[\theta_1, \theta_2]$ とも書かれる．

ベクトル場のベクトル空間に括弧積 [,] を一緒に考えたものは，環に非常に似たものになる．実際，[,] を積とみなすことにすると，すべの環の公理が（さらに代数の公理さえも），ただ1つ積の結合性だけを除いて満たされる．その代わり，括弧積はそれ自身に特有な等式

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}] = 0,$$

$$[[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2], \mathcal{D}_3] + [[\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3], \mathcal{D}_1] + [[\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_1], \mathcal{D}_2] = 0$$

を満たす．これらは定義 (1) から直ちに得られる．第2の式は**ヤコビの恒等式**と呼ばれる．これは結合律の代わりになっていて，後に見るように，結合律と密接な関係にある．

加法 $a+b$ と交換子（または**括弧積**）$[a, b]$ という2つの演算を持つ集合 $\mathcal{L}$ が**リー環**[1]と呼ばれるのは，積の結合律以外のすべての環の公理と，代わりの

$$[a, a] = 0, \quad [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0 \tag{4}$$

をすべての $a, b, c \in \mathcal{L}$ に対して満たすときである．もし $\mathcal{L}$ が体 K 上のベクトル空間であり，

$$[\gamma a, b] = [a, \gamma b] = \gamma[a, b] \qquad (a, b \in \mathcal{L},\ \gamma \in K)$$

を満たすときは，**リー代数**と言い，元 $[a, b]$ を a と b の**交換子**と言う．関係式 $[a, a] = 0$ から，任意の b, c に対して $[b, c] = -[c, b]$ となることがわかる（$a = b + c$ と置けばよい）．

---

[1] ［訳註］日本では次に定義するリー代数のことをリー環と言うことが多く（言葉の誤用ではあるが），ここに定義する意味でのリー環はあまり意識的に使われない．しかし，本書のように両方の概念を同時に扱うような場合は，リー環とリー代数を区別して呼ぶことになる．

例 1. 多様体上のベクトル場にポアソン括弧という演算を考えれば，リー代数になる（実多様体か複素解析的多様体かによって，$\mathbb{R}$ 上か $\mathbb{C}$ 上かになる）．

例 2. 環 A のすべての微分は，交換子 (2) に関してリー環になる．A が体 $K \subset A$ 上の代数であれば，条件 $\mathcal{D}(\alpha) = 0$，$\alpha \in K$ を満たすすべての微分は K 上のリー代数になる．

このことの証明は，微分作用素に対するのと同じである．

例 3. A を結合的だが必ずしも可換でない環とする．$a, b \in A$ に対して $[a, b] = ab - ba$ と置く．この交換子積に関して A はリー環になる．A が体 K 上の代数ならば，同じ体 K の上のリー代数になっている．このことの証明もまたは微分作用素に対するのと同じである．

$A = M_n(K)$ が n 次の全行列環であれば，得られる代数は**一般線形リー代数**であり，$\mathfrak{gl}(n, K)$ または $\mathfrak{gl}(n)$ と書かれる．

注意しておくが，1 階線形微分作用素の場合は例 3 にそのまま当たっているわけではないが，A としてすべての線形微分作用素のなす環をとり，1 階の作用素のなす部分空間 $\mathcal{L} \subset A$ をとると，（積 ab に関して閉じていないので）これは部分環にはならないが，$[a, b] = ab - ba$ に関しては閉じている．明らかにこれでリー代数が得られる．同じような方法を代数 $A = M_n(K)$ に適用すると，以下の新しい重要な例が得られる（交換子に関して閉じているという性質は，簡単に確かめられる）．

例 4. トレース 0 のすべての行列からなる部分空間 $\mathcal{L} \subset M_n(K)$ を考える．$\mathcal{L}$ は**特殊線形リー代数**と呼ばれ，$\mathfrak{sl}(n, K)$ または $\mathfrak{sl}(n)$ と書かれる．

例 5. $\mathcal{L} \subset M_n(K)$ を歪対称，つまり，

$$a^* = -a \tag{5}$$

を満たす行列 a の全体とする．ここで，* は転置を表わす．$\mathcal{L}$ は**直交リー代数**と呼ばれ，$\mathfrak{o}(n, K)$ または $\mathfrak{o}(n)$ と書かれる．

例 6. $K = \mathbb{C}$ とし，$\mathcal{L} \subset M_n(\mathbb{C})$ を再度 (5) 式で特徴付けるが，今度は *

はエルミート転置を表わすとする．$\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}$ 上のリー代数になり，**ユニタリ・リー代数**と呼ばれ，$\mathfrak{u}(n)$ と書かれる．さらに $\mathrm{Tr}\, a = 0$ という条件を課すと，**特殊ユニタリ・リー代数** $\mathfrak{su}(n)$ が得られる．

例 7.　$K = \mathbb{H}$ を四元数体とし，$\mathcal{L} \subset M_n(\mathbb{H})$ をまた (5) 式で特徴付けるが，今度は * は四元数的エルミート転置を表わすとする．$\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}$ 上のリー代数で，**ユニタリ・シンプレクティック・リー代数**と呼ばれ，$\mathfrak{spu}(n)$ と書かれる．

例 8.　J を体 K 上の非退化で歪対称な $2n$ 次行列とし，$\mathcal{L} \subset M_{2n}(K)$ を

$$aJ + Ja^* = 0 \tag{6}$$

を満たす $a \in M_{2n}(K)$ の全体とする．$\mathcal{L}$ は**シンプレクティック・リー代数**と呼ばれ，$\mathfrak{sp}(2n, K)$ または $\mathfrak{sp}(2n)$ と書かれる．

例 4–8 で導入された用語の由来は，すぐにはっきりさせることにする．

リー代数 $\mathcal{L}$ は，K 上のベクトル空間として有限次元のとき，**有限次元**と言う．空間 $\mathcal{L}$ の K 上の次元をリー代数 $\mathcal{L}$ の**次元**と言い，$\dim \mathcal{L}$ または $\dim_K \mathcal{L}$ と書く．

たとえば，3 次元空間のある領域におけるベクトル場のリー代数は，$\mathbb{R}$ 上では無限次元である．というのは，ベクトル場は，A, B, C を任意の微分可能な関数として，$A\dfrac{\partial}{\partial x} + B\dfrac{\partial}{\partial y} + C\dfrac{\partial}{\partial z}$ と書かれるからである．リー代数 $\mathfrak{gl}(n)$ や例 4–8 のリー代数は有限次元で，その次元は以下のとおりである．

$$\dim \mathfrak{gl}(n) = n^2, \quad \dim \mathfrak{sl}(n) = n^2 - 1, \quad \dim \mathfrak{o}(n) = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n) = n^2, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1,$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{spu}(n) = 2n^2 + n, \quad \dim_K \mathfrak{sp}(n, K) = 2n^2 + n.$$

リー環とリー代数の**同型**の定義は，結合的環とまったく同じように定義される．たとえば，すべての非退化で歪対称な $2n$ 次行列は，すべて（体 K 上で）共役であることはよく知られている．このことから容易に，異なる行列 J に対して (6) 式によって定義されるリー代数が同型であることがわかる（このために，記号 $\mathfrak{sp}(n, K)$ の中に J を示さないのである）．多少自明でない

同型の例を挙げよう.

例 9. 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトルは，ベクトル積 [,] に関して $\mathbb{R}$ 上のリー代数 $\mathcal{L}$ になる（この場合のヤコビの恒等式 (4) はよく知られている）．各ベクトル a に対して線形変換 $\varphi_a(x) = [a, x]$ を対応させると，スカラー 3 重積公式から，変換 φ_a が歪対称，つまり $\varphi_a^* = -\varphi_a$ であることがわかる．一方，$\mathbb{R}^3$ の任意の歪対称線形変換 φ に対して，$\varphi(c) = 0, |c| = 1$ を満たすベクトル $c \in \mathbb{R}^3$ がある．すると，φ はまた c と直交する平面の歪対称変換，つまり（$\varphi \neq 0$ ならば）$90°$ の回転とある数 k を掛ける変換を引き起こす．$a = kc$ とすると，$\varphi = \varphi_a$ となることは容易に確かめられる．こうして，$a \mapsto \varphi_a$ は空間 $\mathcal{L}$ から $\mathfrak{o}(3)$ への 1 対 1 の線形写像である．ヤコビの恒等式から直ちに，この写像がリー代数の同型であることがわかり，こうしてリー代数 $\mathcal{L}$ は $\mathfrak{o}(3)$ と同型である．

結合的代数とのアナロジーによって，リー代数の**部分代数**，**準同型**，**イデアル**（$[a, b] = -[b, a]$ という関係式によって，左イデアル，右イデアル，両側イデアルの概念は一致する），**単純リー代数**，そしてイデアルによる**商代数**の概念が定義される．準同型定理のアナロジーが成り立つ．リー代数（またはリー環）$\mathcal{L}$ は，すべての $a, b \in \mathcal{L}$ に対して $[a, b] = 0$ のとき，**可換**と言う．結合的代数の場合のように，基底 $e_1, \ldots, e_n$ を持つ有限次元リー代数に対しては，交換子積は

$$[e_i, e_j] = \sum c_{ijk} e_k$$

で定まる**構造定数** c_{ijk} によって決定される．

B. リー理論

この小節の主題は，単位元の近傍における無限小の観点からのリー群の研究，つまり群のレベルでの「微分法」である．微分のアナロジーとなるのは，ここでは，リー群にあるリー代数を対応させることである．また対応するリー代数から，どの程度リー群を再構成することができるかが明らかにされる．これは積分法のアナロジーになっている．

（歴史的にはそうして始まったのだが）多様体 X に作用しているリー群 G を例として，この理論の説明を始めよう．そのような作用は写像

$$\varphi : G \times X \to X \tag{7}$$

によって与えられる（§12 参照）．単位元 $e \in G$ の近傍での座標 $u_1, \ldots, u_n$ と点 $x_0 \in X$ の近傍での座標 $x_1, \ldots, x_m$ を導入して，この作用 φ を関数

$$\varphi_1(u_1, \ldots, u_n; x_1, \ldots, x_m),\ \ldots\ , \varphi_m(u_1, \ldots, u_n; x_1, \ldots, x_m)$$

によって与えよう．議論を確定するために，以下ではこれらの関数は実解析的であると仮定する．同じようにリー群の群演算も実解析的であると仮定する．これ以外（n 回微分可能関数や複素解析関数）の場合もまったく同じようにに考えることができる．

G が実数の加法群 $\mathbb{R}$ であれば，作用 (7) は多様体 X の 1 パラメータ変換群を定める．力学で，$\varphi(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$ を，時間 t が変化する際の配位空間 X の点の変動と解釈するとき，「無限小の」変動があって，それが非常に長い間観測されたと考えるのである．つまり，変換 $\varphi(t, x)$ の（時刻 $t = 0$ での）速度場 θ のことを考えている．座標で書けば，

$$\theta_i = \left.\frac{\partial \varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial t}\right|_{t=0} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

となる．対応する微分作用素は

$$\mathcal{D}(F)(x) = \left.\frac{\partial}{\partial t}(F(\varphi(t, x))\right|_{t=0}$$

という条件で定義される．任意の群 G の場合，ヘルマン・ワイルは，この群の作用 (7) に対応する変動を受ける物質に満たされたものとして，多様体 X を想像することを提案した．ここでもまた，対応する運動の速度場を考えることができる．そのような場はそれぞれ，単位元 e における群 G の接空間 $T_{e,G}$ のベクトル ξ によって定まる．作用 (7) は接空間の写像

$$(d\varphi)_{(e,x)} : T_{e,G} \oplus T_{x,X} \to T_{x,X}$$

を定める．ここで，$T_{x,X}$ は点 x における X の接空間である．任意のベクトル $\xi \in T_{e,G}$ に対して，ベクトル

$$(d\varphi)_{(e,x)}(\xi \oplus 0) \in T_{x,X}$$

は，求めていた X 上のベクトル場 θ_ξ を定める．容易にわかるように，これは座標では，$\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$ $(i = 1, \ldots, m)$ という式によって与えられ，解析的である．対応する X 上の微分作用素は，

$$\mathcal{D}_\xi(F)(x) = \frac{\partial F(\varphi(g,x))}{\partial \xi} \qquad (\text{変数 } g \text{ に関する微分}^2)$$

という形になる．

このことから，定義が不変的である（座標系の取り方によらない）ことがわかる．写像 $\xi \mapsto \theta_\xi$ は明らかに ξ に関して線形で，それゆえ X 上のベクトル場の作るある有限次元空間 $\mathcal{L}$ を定めている．基本的な事実は，こうして構成されたベクトル場の有限次元族 $\mathcal{L}$ がポアソン括弧をとることで閉じており，つまり，あるリー代数を定めていることである．

このことが起こる理由を，作用 φ が左正則作用という以下で述べる場合にだけ説明することにする．$X = G$ で，$\varphi(g_1, g_2) = g_1 g_2$ $(g_1 \in G,\ g_2 \in X = G)$ という場合である．左正則作用は右正則作用と可換である．$g_1 \in G$ に対応する左正則作用は $g \to g_1 g$ の形で，$g_2 \in G$ に対応する右正則作用は $g \to g g_2^{-1}$ の形であるなら，これらの可換性は，群演算の結合性 $(g_1 g) g_2^{-1} = g_1(g g_2^{-1})$ を表わすに過ぎない．これから，任意の $\xi \in T_{e,G}$ に対してベクトル場 $\theta_\xi(x) = (d\varphi)_{(e,x)}(\xi \oplus 0)$ が右正則作用に関しても不変であることが，形式的な計算だけで容易に確かめられる．言い換えれば，接ベクトル $\theta_\xi(g g_1^{-1})$ は接ベクトル $\theta_\xi(g)$ から，右正則作用 $g \mapsto g g_1^{-1}$ の微分 $d(g_1^{-1})$ によって得られる．この性質を満たすベクトル場 θ は**右不変**であると言われる（§15 のリー群の定義の後の注意参照）．そのようなベクトル場はベクトル $\theta(e)$ を与えることによって一意的に決定され，任意の接ベクトル $\eta \in T_{e,G}$ は，$\theta(e) = \eta$ を満たすベクトル場 θ を定義する．ベクトル $\theta(g)$ は，e を g に移す右移動によって，η から得られる．こうして，群 G 上の右不変ベクトル場の作るベクトル

---

2 ［訳註］$g(t)$, $g(0) = e$ を群 G 上の曲線で，その $t = 0$ での微分を $\xi \in T_{e,G}$ としたときの

$$\left.\frac{\partial F(\varphi(g(t), x))}{\partial t}\right|_{t=0}$$

のことである．変数 g に関する ξ 方向の微分という感じを表わした記号である．

空間は，空間 $T_{e,G}$ と同型である．上で構成されたベクトル場の空間

$$\mathcal{L} = \{\theta_\xi(\cdot) = (d\varphi)_{(e,\cdot)}(\xi \oplus 0) \mid \xi \in T_{e,G}\}$$

は，今述べたように，右不変ベクトル場からなり，それゆえ $T_{e,G}$ のある部分空間に同型である．しかし，容易にわかるように，写像 $\xi \mapsto \theta_\xi$ は核を持たず，つまり，$\dim \mathcal{L} = \dim T_{e,G}$ であり，それゆえ，$\mathcal{L}$ はすべての右不変ベクトル場からなる．最後に，すべての右不変ベクトル場の集合が交換子に関して閉じていることは，次の明らかな関係式から得られる．f が点 x を y に移す多様体 X の変換で，θ', θ'' が X 上のベクトル場ならば，

$$(df)_x[\theta'_x, \theta''_x] = [(df)_x\theta'_x, (df)_x\theta''_x]$$

となる．こうして，今構成したベクトル場の族 $\mathcal{L}$ はリー代数となる．これはリー群 G のリー代数と呼ばれ，$\mathcal{L}(G)$ と書かれる．次の定理が得られたことになる．

定理．リー群 G のリー代数 $\mathcal{L}(G)$ は

$$\theta_\xi(\cdot) = (d\varphi)_{(e,\cdot)}(\xi \oplus 0) \qquad (\xi \in T_{e,G})$$

というすべてのベクトル場からなる．ここで，$\varphi : G \times G \to G$ は G の群演算である．それはまた，

$$\mathcal{D}_\xi(F)(g) = \frac{\partial}{\partial \xi} F(\varphi(g, \gamma)) \qquad (\xi \in T_{e,G})$$

の形の微分作用素の集合と一致する．ここで，微分は 2 つ目の変数 γ に関するものである．最後に，リー代数 $\mathcal{L}(G)$ は G 上の右不変なベクトル場の作るリー代数と一致し，右不変な 1 階微分作用素の作るリー代数とも一致する．

リー代数 $\mathcal{L}(G)$ の構造定数は，元 e の近傍における G の群演算 $\varphi(x, y)$ の係数を使って，非常に具体的に表わすことができる．ベクトル $\xi \in T_{e,G}$ は座標 $x_1, \ldots, x_n$ に対する値 $\mathcal{D}_\xi(x_i)(e)$ によって一意的に決定されるので，交換子 $[\mathcal{D}_\xi, \mathcal{D}_\eta]$ に対するこれらの値を求めればよい．$\varphi(x, e) = x$, $\varphi(e, y) = y$ であることから，$\varphi(x, y)$ に対する級数の 1 次と 2 次の項が

$$\varphi(x, y) = x + y + B(x, y) + \cdots \tag{8}$$

の形であることがわかる．ここで，$B(x, y)$ は x と y に関してそれぞれ線形である．簡単な代入計算により，$\mathcal{D}_\xi \mathcal{D}_\eta (x_i)(e) = B(\xi, \eta)_i$ となる．ここで，$B(\xi, \eta)_i$ は i 番目の座標である．それゆえ

$$[\xi, \eta] = B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi) \tag{9}$$

となる．(8) 式と (9) 式から，群演算 $\varphi(x, y)$ の 1 次の項は，同じ次元のすべてのリー群に対して一致し，群 $\mathbb{R}^n$ のときと同じになるが，2 次の項はリー代数 $\mathcal{L}(G)$ を定める．

リー代数 $\mathcal{L}(G)$ の定義の不変な性格から，一連の自然な性質はほとんど明らかになる．$f : G \to H$ がリー群の準同型なら，df は準同型

$$\mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(H)$$

を定め，その核は準同型 f の核のリー代数と一致する．H がリー群 G の閉部分群であれば $\mathcal{L}(H)$ は $\mathcal{L}(G)$ の部分リー代数であり，H が正規部分群であれば $\mathcal{L}(H)$ は $\mathcal{L}(G)$ のイデアルであり，$\mathcal{L}(G/H) = \mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(H)$ となる．もし $\varphi : G \times X \to X$ が多様体 X 上のリー群の作用ならば，上で定義された X 上のベクトル場の族

$$\mathcal{L} = \{\theta_\xi(\cdot) = (d\varphi)_{(e,\cdot)}(\xi \oplus 0) \mid \xi \in T_{e,G}\}$$

はリー代数で，G のリー代数の準同型像 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(N)$ である．ここで，N は作用の核である．

(9) 式により，アーベル群のリー代数は可換である．

例 10. $G = GL(n)$ とする．単位行列の近傍では $A = E + X$ と書くことができ，$B = E + Y$ ならば，$AB = E + X + Y + XY$ である．こうして (8) 式によって $B(X, Y) = XY$ であり，(9) 式から，リー代数 $\mathcal{L}(GL(n))$ の元 X, Y の交換子は $XY - YX$ の形になり，つまり，$\mathcal{L}(GL(n)) = \mathfrak{gl}(n)$ となる．このとき，X が行列 $E + (x_{ij})$ で，x_{ij} が座標関数ならば，ベクトル $\xi \in T_{e,G}$ は行列 $\dfrac{\partial X}{\partial \xi} = \left(\dfrac{\partial x_{ij}}{\partial \xi}\right)$ に対応する．

例 11. 今度は $G = SL(n)$ とする．このとき部分群 $G \subset GL(n)$ は，方程式 $\det(E + X) = 1$ によって与えられる．$GL(n)$ の接ベクトル ξ は，

$\dfrac{\partial}{\partial\xi}(\det(E+X))=0$ であれば $SL(n)$ にも接している．しかし，よく知られているように

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\det(E+X))=\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial X}{\partial\xi}\right)$$

である．それゆえ，$SL(n)$ の接ベクトル ξ に対しては $\mathrm{Tr}\left(\dfrac{\partial X}{\partial\xi}\right)=0$ であり，つまり，$\mathcal{L}(SL(n))=\mathfrak{sl}(n)$ である．

例 12. 同じように，$G=O(n)$ で $E+X\in G$ ならば $(E+X)(E+X^*)=E$ である．これから

$$\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(E+X)\right\}(E+X^*)+(E+X)\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(E+X^*)\right\}\right]\Bigg|_{X=0}=0$$

となり，$\left(\dfrac{\partial X}{\partial\xi}\right)+\left(\dfrac{\partial X}{\partial\xi}\right)^*=0$ となる．こうして，$\mathcal{L}(O(n))=\mathfrak{o}(n)$ となる．

例 13. §15 の初めに示したように，群 $SO(3)$ は固定点を持つ剛体に対する配位空間である．そのような剛体の運動は，曲線 $g(t)\in SO(3)$ によって与えられる．接ベクトル $\dfrac{dg}{dt}$ は点 $g(t)$ における群 $SO(3)$ の接空間 $T_{g(t)}$ に属している．これを右移動 g^{-1} で変換してベクトル $\gamma(t)=\dfrac{dg}{dt}g^{-1}\in T_e$ に，つまりリー代数 $\mathfrak{o}(3)$ の元に移すことができる．$g(t)$ が直交変換，つまり $g(t)g(t)^*=e$ であることから，$\dfrac{dg}{dt}g^*+g\left(\dfrac{dg}{dt}\right)^*=0$ が，つまり $\gamma(t)^*=-\gamma(t)$ がわかる．これは例 12 に対応している．剛体のある点が $x(t)=g(t)(x_0)$ という規則に従って運動するなら，明らかに $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dg(t)}{dt}(x_0)=\gamma(t)g(t)(x_0)=\gamma(t)(x(t))$ となる．例 9 により，変換 $\gamma(t)$ に対してあるベクトル $\omega(t)$ が存在して，γ は $\omega(t)$ とのベクトル積と同じになる．したがって，

$$\frac{dx(t)}{dt}=[\omega(t),x(t)]$$

となる．この等式は，各時刻 t で，剛体の点の速度は，一定の角速度 $\omega(t)$ による回転と同じになることを示している．ベクトル $\omega(t)$ は**瞬間的角速度ベクトル**と呼ばれる．ベクトル $\dfrac{dg}{dt}$ を左移動によって，$\tilde{\gamma}(t)=g^{-1}\dfrac{dg}{dt}\in T_e$ に移すこともできる．$\tilde{\gamma}(t)=g^{-1}\gamma g$ であり，対応するベクトル $\tilde{\omega}=g^{-1}\omega$ が

物体に固定した座標系での瞬間的角速度であることは容易にわかる．

例 11，12 とまったく同じ議論によって，すでに述べた他のリー群のリー代数を決めることができる．

$$\mathcal{L}(U(n)) = \mathfrak{u}(n), \quad \mathcal{L}(SU(n)) = \mathfrak{su}(n),$$

$$\mathcal{L}(Sp(n)) = \mathfrak{sp}(n), \quad \mathcal{L}(SpU(n)) = \mathfrak{spu}(n).$$

これまでの議論がすべて複素リー群にも適用できることを，もう一度思い出しておこう．すぐわかるように，対応するリー代数 $\mathcal{L}(G)$ は体 $\mathbb{C}$ 上のリー代数で，特に，

$$\mathcal{L}(GL(n,\mathbb{C})) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), \quad \mathcal{L}(SL(n,\mathbb{C})) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}),$$

$$\mathcal{L}(O(n,\mathbb{C})) = \mathfrak{o}(n,\mathbb{C}), \quad \mathcal{L}(Sp(2n,\mathbb{C})) = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$$

である．

リー理論の第 2 の部分，つまり，リー群 G をそのリー代数 $\mathcal{L}(G)$ からどの程度まで再構成することができるかという問題に移ろう．ここで，問題の建て方には 2 つの方法が可能である．まず，群の単位元のある近傍でだけ群演算 φ を調べることができる．この e の近傍に座標系 $x_1, \ldots, x_n$ を導入すれば，群演算は n 個のベキ級数

$$\varphi(x,y) = (\varphi_1(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n))$$

によって与えられる．これらは結合関係

$$\varphi(x,\varphi(y,z)) = \varphi(\varphi(x,y),z)$$

と単位元の存在

$$\varphi(x,0) = \varphi(0,x) = x$$

を満たさなければならない．(逆元の存在，つまり

$$\varphi(x,\psi(x)) = \varphi(\psi(x),x) = 0$$

を満たすベキ級数 $\psi(x)$ の存在は，これらから，陰関数の定理によって容易に導かれる.）幾何的には，問題のこのような定式化は局所リー群の研究に対応

している．それは，空間 $\mathbb{R}^n$ の点 0 のある近傍 V で定義された解析的な群演算で（積は $\mathbb{R}^n$ の点だが，同じ近傍には属さないこともある），結合性の公理と 0 である単位元の存在の公理を満たすもののことである．近傍 V_1 と V_2 で与えられた 2 つの局所リー群が同型であるというのは，0 の近傍 $V_1' \subset V_1$ と $V_2' \subset V_2$ があり，第 1 の群演算を第 2 の群演算に移す微分同相 $f: V_1' \to V_2'$ があるときである．局所リー群の準同型も同じように定義する．問題をこう定式化すると答は非常に単純なものになる．

リーの定理．あらゆるリー代数は，ある局所リー群のリー代数である．局所リー群は同型を除いてそのリー代数によって決定される．2 つの局所リー群のリー代数の間のリー代数準同型 $\varphi: \mathcal{L}(G_1) \to \mathcal{L}(G_2)$ は $\varphi = (df)_e$ の形をしている．ここで，$f: G_1 \to G_2$ は局所リー群の準同型で，この条件によって一意的に定まる．

リー代数の交換子に対する (9) 式を使えば，この定理は極めて初等的でかつ驚くべきことを意味することになる．つまり，群演算の中の 2 次の項 $B(x,y)$ が，同型を除いて（つまり，解析的な座標変換を除いて）群演算を一意的に決めることを，定理は示しているのである．$\varphi(x,y)$ を形式的ベキ級数と考えると，定理は，どんな解析学も入り込まない，純粋に代数的な性格のものになる．それは標数 0 の任意の体上の「形式的な群演算」に対して成り立っている．リー理論のこの代数的な様相については，後で戻ることにする．

大域的なリー群，つまり（現在では一般的になっている）§15 で与えた定義による群に移ると，事情はいくぶん複雑になる．実際，加法群 $\mathbb{R}$ と円周群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ はすでに，互いに同型ではないが，1 次元の可換リー代数という同じリー代数を持っている．しかし，連結かつ単連結なリー群に制限するなら，理想的な状況が復活する（§14 例 7 参照）．

カルタンによって証明された定理によれば，上述のリーの定理の主張は，「局所リー群」という言葉を「連結かつ単連結なリー群」に置き換えれば，そのまま成り立つのである．（準同型 $\mathcal{L}(G_1) \to \mathcal{L}(G_2)$ についての証明では，G_1 が単連結であれば十分である．）

リー理論は，連結だが単連結ではないリー群の研究にも適用することがで

きる．というのは，群 G の普遍被覆 $\tilde{G}$ は（一意的な仕方で）群になり，$\tilde{G}$ の中心に含まれる離散な正規部分群 N があって，$G = \tilde{G}/N$ となるからである．これは，同じリー代数を持つすべての連結リー群の構成を与えている．$G = \tilde{G}/N$ 型の表示の例としては

$$G = O(n), \quad \tilde{G} = \mathrm{Spin}(n), \quad N = \{E, -E\},$$

$$G = PSL(n, \mathbb{C}), \quad \tilde{G} = SL(n, \mathbb{C}), \quad N = \{\varepsilon E \mid \varepsilon^n = 1\}$$

がある．

C. リー代数の応用

ほとんどの応用はリー理論に基づいている．それにより，リー群論の多くの問題が，原則としてより簡単なリー代数に関する類似の問題に帰着する．§16 で述べた単純リー群の分類を導く直接的な方法は，単純リー代数の分類とその後でリー–カルタン理論を適用することである．たとえば，複素数体上では，有限次元の単純リー代数

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$$

が存在し，さらにそれぞれ E_6, E_7, E_8, G_2, F_4 と書かれる次元 78, 133, 248, 14, 52 の 5 つの例外型のリー代数が存在することが証明されている．リー–カルタン理論によれば，これは連結な複素単純リー群の分類を与えている．各リー代数は 1 つの単連結な群に対応している．たとえば $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ には $SL(n, \mathbb{C})$ が対応している．そして，G の中心に含まれる離散な正規部分群 N に対する G/N の形の商群は，同じリー代数を持つ．これらの群のそれぞれに対して中心 Z はそれ自身有限群だから，§16 で述べたように，各単連結群に対しては有限個の商群が得られる．

まったく同じように，単純な実リー群の理論は，体 $\mathbb{R}$ 上の単純リー代数の理論に帰着する．その研究は，代数的閉体でない体上の単純代数や単純多元体を調べた §11 で述べたのと類似の方法によって実行される．つまり，結合的代数に対して §11 で行ったのとまったく同じようにして，$\mathcal{L}$ が体 K 上のリー代数で，K' が K の拡大体の場合に，基礎体の拡大 $\mathcal{L}_{K'} = \mathcal{L} \otimes_K K'$ を

定義される．$\mathcal{L}$ が体 $\mathbb{R}$ 上の単純リー代数ならば，$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ 上単純なリー代数であるか，または2つの同型な単純リー代数の直和であることが証明される．こうして，体 $\mathbb{R}$ 上の単純リー代数を研究する問題は体 $\mathbb{C}$ 上の類似の問題に帰着する．つまりこのように，§16で述べた「複素リー群 G の実アナロジー」という概念の根拠を与えることができる．

最後に，リー代数と力学との関係を示そう．

例 14. 固定点を持つ剛体の慣性運動を考える．物体に外力が作用しないので，角運動量 J の保存法則

$$\frac{dJ}{dt} = 0 \tag{10}$$

が成り立つ．例13でのように，運動が曲線 $g(t) \in SO(3)$ によって記述されるとしよう．物体に固着した座標系における角運動量 $\tilde{J} = g^{-1}J$ を導入すると，(10)式は明らかに

$$\frac{d\tilde{J}}{dt} + [\tilde{\omega}, \tilde{J}] = 0 \tag{11}$$

と変換される．これらの方程式は**オイラー方程式**と呼ばれている（ベクトル $\tilde{J}$ の3つの座標に対応して3つの方程式がある）．$\tilde{\omega}$ と $\tilde{J}$ との間に慣性テンソル I を使った

$$\tilde{J} = I(\tilde{\omega}) \tag{12}$$

という関係があるので，これは $\tilde{J}$ に対する方程式と考えることができる．ここで，I は t に依存しない対称線形変換である．変換 I は

$$T = \frac{1}{2}(\tilde{J}, \tilde{\omega}) = \frac{1}{2}(I(\tilde{\omega}), \tilde{\omega}) \tag{13}$$

という式によって運動エネルギーを定義しており，それゆえ正定値になる．

(11)式で [,] はベクトル積を表わしているが，例9に従えば，それはリー代数 $\mathfrak{o}(n)$ の交換子と考えることもできる．この見方をすれば，方程式(11)は非常に広いクラスのリー群とリー代数に一般化することが可能である．この際，エネルギー T は（(13)式の変換 I は一定だから）左移動に関して不変な，リー群 G 上のリーマン計量と考えることができる．T は対称変換 $\mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G)^*$ として定義される．(剛体と回転群 $SO(3)$ のアナロジーによって）$\tilde{\omega}$ としてリー代数 $\mathcal{L}(G)$ の元をとるから，$\tilde{J} \in \mathcal{L}(G)^*$ であり，そ

れに対して方程式 (11) を書き下すことができる．任意の単純リー群に対して，対応する力学系が完全積分可能であることが証明される（§15 例 2(c) 参照）．このような方程式が，多くの場合に興味深い物理的な意味を持っているのである．たとえば，3 次元ユークリッド空間の運動全体の群 G の場合（$G = O(3) \cdot T$ で，T は平行移動の群）は，理想流体における物体の慣性運動に対応している．群 $SO(4)$ の場合にも物理的な意味がある．しかし，最も興味深いのは，多様体の微分同相全体のなす「無限次元リー群」の場合で，そのリー代数はベクトル場全体のなすリー代数である．この場合は理想流体の運動のような現象に関係している[3]．しかしながら，それは標準的なリー代数とリー群の理論には当てはまらず，現在のところ理論は発見的なレベルに留まっているようにみえる．

D. 他の非結合的代数

リー代数の理論は，環論の深くて重要な結果が必ずしも結合性を課すことと関係がないことを，非常に納得しやすく示してくれている．リー代数はおそらく，数学全体にとって重要な非結合的環の，最も顕著な例である．しかし，それ以外にも非可換な環はある．

例 15. §8 例 5 で述べたように，四元数は，複素数 z_1, z_2 を使って $z_1 + z_2 j$ の形に書くことができる．この形なら四元数の積は非常に簡単に述べられる．環のすべての公理が満たされていると仮定すれば，後は $j^2 = -1$, $jz = \bar{z}j$（そして複素数同士の演算は体 $\mathbb{C}$ でと同じ）とすればよい．この方向にさらに歩を進めて，q_1, q_2 を四元数，ℓ を新しい元として，$q_1 + q_2\ell$ の形の元からなる 8 次元の代数を定義する試みも可能である．こうすれば興味深い非結合的多元体[4]が得られるのである．積の結合性を除いた，環のすべての公理が満たされているとすれば，後は $q_1 \cdot q_2$, $q_1(q_2\ell)$, $(q_1\ell)q_2$, $(q_1\ell)(q_2\ell)$ の形の積を決めてやればよい．四元数同士は多元体 $\mathbb{H}$ の元のようにして掛け，さらに

[3] ［訳註］これについては，たとえばアーノルド [2] 附録 2 参照．

[4] ［訳註］もちろん結合律を満たさないので多元体ではないが，後に示すように 0 以外の元に逆元があるので，誤用を恐れず，結合律以外の多元体の公理を満たすという意味で，この言い方をしている．

$$q_1(q_2\ell) = (q_2q_1)\ell, \quad (q_1\ell)q_2 = (q_1\overline{q_2})\ell,$$

$$(q_1\ell)(q_2\ell) = -(\overline{q_2}q_1)$$

と置く．ここで，$\bar{q}$ は q に共役な四元数である．

言い換えれば，積は

$$(p_1 + p_2\ell)(q_1 + q_2\ell) = p_1q_1 - \overline{q_2}p_2 + (q_2p_1 + p_2\overline{q_1})\ell$$

という式で定義される．積の結合性以外の環のすべての公理は，容易に確かめることができる．元 $1 \in \mathbb{H}$ は新しい環の単位元になる．これは $\mathbb{R}$ 上 8 次元の代数で，基底はたとえば $\{1, i, j, k, \ell, i\ell, j\ell, k\ell\}$ で与えられる．この代数は**ケイリー代数**，その元は **8 元数**または**ケイリー数**と呼ばれ，$\mathbb{O}$ と書かれる[5].

$u = q_1 + q_2\ell \in \mathbb{O}$ に対して

$$\bar{u} = \overline{q_1} - q_2\ell, \quad |u| = \sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}, \quad \mathrm{Tr}\, u = 2\mathrm{Re}\, q_1$$

と置く．$u\bar{u} = \bar{u}u = |u|^2$ と $\mathrm{Tr}\, uv = \mathrm{Tr}\, vu$ であることは容易にわかる．元 $u \in \mathbb{O}$ は 2 次方程式

$$u^2 - (\mathrm{Tr}\, u)u + |u|^2 = 0 \tag{14}$$

を満たす[6].

定理．代数 $\mathbb{O}$ は，3 つの元の積がそのうちの 2 つの元が等しければ括弧の位置にはよらないという，弱い結合律を満たす．つまり，

$$u(uv) = (uu)v, \quad (uv)v = u(vv), \quad u(vu) = (uv)u$$

を満たす（最後の式は前の 2 式から得られる）．

この性質を持つ環を**交代環**と言う．交代環では，任意の 2 元から生成される部分環は結合的であることを証明することができる．

上で与えた性質から，$u \neq 0$ に対し，$u^{-1} = |u|^{-2}\bar{u}$ は逆元であり，さら

---

[5] ［訳註］8 元数は英語では octavion と書かれるので $\mathbb{O}$ という記号が使われている．また，ケイリー (Cayley) 数という意味で $\mathcal{C}a$ と書かれることもある．

[6] ［訳註］$u^2 = (q_1 + q_2\ell)^2 = q_1^2 - |q_2|^2 + (q_2q_1 + q_2\overline{q_1})\ell$ だから，$u^2 + |u|^2 = q_1^2 + |q_1|^2 + (q_2q_1 + q_2\overline{q_1})\ell$ となる．$q_i = u_i + v_ij$ $(i = 1, 2)$ と置くと，$t = \mathrm{Tr}\, u$ は $t = q_1 + \overline{q_1} = u_1 + \overline{u_1}$ となり，$\overline{q_1} = \overline{u_1} - v_1j$ である．したがって，$u^2 + |u|^2 = q_1^2 + q_1\overline{q_1} + tq_2\ell = t(q_1 + q_2\ell)$ となる．

に $u(u^{-1}v) = v$, $(vu^{-1})u = v$ を満たすこと，すなわち，$\mathbb{O}$ が非結合的多元体（可除代数）であることがわかる．

$|uv| = |u| \cdot |v|$ を証明するのは難しくない．基底 $1, i, j, k, \ell, i\ell, j\ell, k\ell$ でこの積を書けば，面白い等式

$$\left(\sum_{i=1}^{8} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{8} y_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{8} z_i^2\right)$$

が得られる．ここで，z_i は $x_1, \ldots, x_8$ と $y_1, \ldots, y_8$ の整係数の双線形形式になる．

代数 $\mathbb{O}$ が存在することは，(6, 7, 8 次元の)「低次元の」幾何の興味ある一連の現象の根拠になっている．たとえば，任意の平面 $E = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v \subset \mathbb{O}$ に対して，$wE \subset E$ を満たす元 $w \in \mathbb{O}$ 全体の集合は，複素数体と同型な部分代数 $\mathbb{C}(E)$ を定める．このことは容易に確かめることができる．($\mathbb{O}$ が交代代数であることを使う必要がある．部分代数 $\mathbb{C}(E)$ は 1 と $\alpha = vu^{-1}$ で張られる.）任意の 6 次元部分空間 $F \subset \mathbb{O}$ は，ある平面 E に対する方程式

$$\mathrm{Tr}\,(xu) = 0 \qquad (u \in E)$$

によって与えることができる．このことから $\alpha F \subset F$ $(\alpha \in \mathbb{C}(E))$ であることがわかる（これには，容易に確かめることのできる関係式 $\mathrm{Tr}\,(u(vw)) = \mathrm{Tr}\,((uv)w)$ を使えばよい）．こうして，6 次元部分空間 $F \subset \mathbb{O}$ には $\mathbb{C}$ 上の 3 次元ベクトル空間の自然な構造がある．特に，$X \subset \mathbb{O}$ が滑らかな 6 次元多様体であれば，このことをあらゆる点における接空間に適用すれば，得られる複素構造は点とともに滑らかに変化する．この性質を持つ多様体を**概複素多様体**と言う．概複素多様体の標準的な例は複素解析多様体である．$\mathbb{R}^8$ の任意の滑らかで向きづけ可能な 6 次元部分多様体は概複素多様体であることがわかる．しかしながら，そのような多様体の上に複素構造が存在することは，非常にまれである．たとえば，このようにして得られる S^6 上の概複素構造は，どんな複素構造も与えない．

ケイリー数のもう 1 つの応用は，例外型の単純リー群（§16 参照），たとえばコンパクトなリー群に関係している．すなわち，コンパクトな例外型単純リー群 G_2 は，代数 $\mathbb{O}$ の自己同型群の連結成分と同型である．リー群 E_6 と F_4 も，$\mathbb{O}$ に関連した 2 次元の「射影群」と「直交群」として実現される．

最後に，ケイリー代数は，純粋に代数的な見方からも特別な役割を果たしている．**一般ケイリー代数**とは，q_1, q_2 を体 K 上のある一般四元数代数（§11 参照）の元としたときの，$q_1 + q_2\ell$ の形の元からなる 8 次元の代数であって，積が

$$(p_1 + p_2\ell)(q_1 + q_2\ell) = p_1q_1 + \gamma\overline{q_2}p_2 + (q_2p_1 + p_2\overline{q_1})\ell$$

で与えられるもののことである．ここで，$\gamma \neq 0$ は K のある元である．この代数は常に交代的かつ単純である．これが非結合的多元体であるのは，方程式 $q_1\overline{q_1} - \gamma q_2\overline{q_2} = 0$ が四元数代数の中に 0 でない解を持たないときであり，またそのときに限る．

定理．任意の交代的な多元体は結合的であるか，ある一般ケイリー代数と同型であるかのどちらかである．任意の交代的な単純環は結合的であるか，ある一般ケイリー代数と同型であるかのどちらかである．

結合的多元体のときのように，任意の交代的多元体に「座標」を持つ，射影平面を構成することができる．これは非デザルグ的射影平面のもっとも簡単な例の 1 つである（§10 参照）．それには，ある弱い形のデザルグの定理が成り立つという，簡単な幾何的な特徴付けがある．

別のタイプの非結合的代数が存在して，その理論は（少なくとも有限次元性と単純性の仮定があれば）かなり完全な形に構成でき，また数学的な応用も持っている．しかし，非結合的代数の一般論は今のところまったく存在しない（少なくとも，結合的代数やリー代数の理論と比較できるようなという意味では）．おそらく，そのようなものは一般にはあり得ないのだろうか？実際，任意の有限次元の非結合的代数は，どんな制限も課さない乗積表 c_{ijk}，つまり任意のテンソル $C \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^*$ によって与えられる．C は $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{L})$ の変換を除いて定まる．しかしそのとき，どのような自然な制限があればそのような理論が存在するか，という問題が生まれる．単純な結合的代数，リー代数，交代代数，さらに他のタイプの代数を，統一的な観点から理解するにはどのようにしたらよいのだろうか？ $\mathbb{R}$ 上の非結合的（つまり必ずしも結合的とは限らない）多元体の構成問題はこのテストとなるかも知れない．ここに，そのような多元体の次元は **1, 2, 4, 8** のどれかだけである，という注

目すべき事実がある．しかしながら，この結果の代数的な証明は知られていない．存在している証明はトポロジー的なもので，($\mathbb{R}^n$ と同一視される）代数の積によって定義される写像

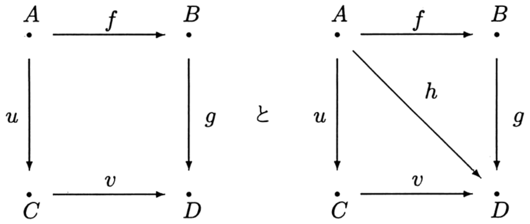
$$(\mathbb{R}^n \setminus 0) \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) \to \mathbb{R}^n \setminus 0$$

のトポロジー的な性質の研究に基づいている．

§ 20. 圏（カテゴリー）

圏の概念と関連したいくつかの他の概念が形成する数学的言語は，標準的な集合論の言葉に比べると独特の性格を持ち，数学的な構成にいくぶん異なった性格を与えている．例から始めることにしよう．

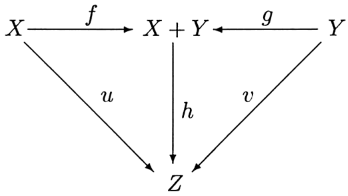
集合を点で表わし，集合 X から集合 Y への写像を，X に対する点から Y に対する点への矢印で表わしたものである**図式**を使う．図式に集合 X, $A_1, \ldots, A_n, Y$ と写像 $f_1 : X \to A_1$, $f_2 : A_1 \to A_2, \ldots, f_{n+1} : A_n \to A_{n+1}$ が描かれていれば，$f_{n+1} \cdots f_2 f_1$ は X から Y へのある写像である．このような集合 A_i と 写像 f_i をどのように選んでも同じ X から Y への写像が得られ，このことが図式に描かれた任意の集合 X と Y に対して成り立つとき，**図式は可換**であると言う．たとえば，



のような図式は，それぞれ $vu = gf$ と $h = vu = gf$ を満たすとき，可換図式であると言う．

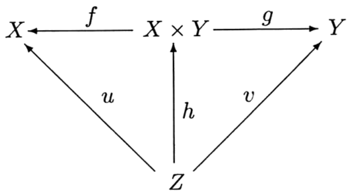
例で考えていくことにしよう．集合論には，任意の集合 X と Y（これらは特定の集合の部分集合とは考えていない）に対する 2 つの演算がある．$X + Y$ と書かれる**離散和**または**和**と，（対 (x, y), $x \in X$, $y \in Y$ からなる）$X \times Y$ と書かれる**積**である．これらの演算はこれまでのような構成によらず，一般的な性質によって記述することができる．たとえば，和 $X + Y$ に関しては，

2つの包含写像 $f: X \to X+Y$, $g: Y \to X+Y$ があり，次の普遍写像性が成り立っている.「任意の集合 Z と写像 $u: X \to Z$, $v: Y \to Z$ に対して，図式



(1)

が可換になるような写像 $h: X+Y \to Z$ が一意的に存在する.」まったく同じように，積 $X \times Y$ に関しては，2つの射影 $f: X \times Y \to X$, $g: X \times Y \to Y$ が定義され，任意の集合 Z と写像 $u: Z \to X$, $v: Z \to Y$ に対して，図式

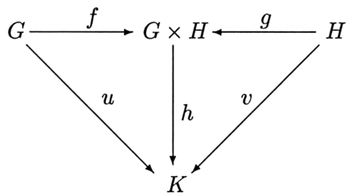


(2)

が可換になるような（つまり $fh = u$, $gh = v$ を満たす）写像 $h: Z \to X \times Y$ が一意的に存在する．明らかに $h(z) = (u(z), v(z))$ である．

次のステップとして，ある特別なタイプの写像を指定できるような集合を考え，図式 (1), (2) の存在を要求することによってどのような構成が定義されるかを考えることができる．位相空間とその間の連続写像に対しては，もちろん，位相空間の離散和と直積の概念が得られる．群の場合には，写像として群準同型だけを考えることになるが，より興味深い．アーベル群や，さらに与えられた環上の加群に対しては，直和 $A \oplus B$ は埋め込み $A \to A \oplus B$, $B \to A \oplus B$ と標準準同型（射影）$A \oplus B \to A$, $A \oplus B \to B$ を持ち，(1), (2) に描かれた性質（普遍写像性）が満たされる（今はもちろん，u, v, h は任意の写像ではなく，準同型である）．こうしてここでは，離散和と積という集合論の2つの演算のアナロジーが合わさったものになる．しかしこれは非可換な群では成り立たない．直積 $G \times H$ には，普遍写像性 (2) を満たすような標準準同型 $G \times H \to G$ と $G \times H \to H$ が存在するが，包含写像

$f: G \to G \times H$ と $g: H \to G \times H$ は定義されるものの，普遍写像性 (1) は成り立たないのである．これを見るためには，群 K として，その部分群 G', H' で，G' と H' の元が互いに可換でなく，それぞれ G, H に同型であるようなものをとり，u, v を G, H と部分群 G', H' との同型とすればよい．元 $g \in G$ と $h \in H$ は $G \times H$ の中では可換だから，どんな準同型 h に対しても，図式

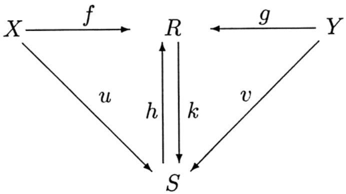


は可換にならない．そうは言っても，必要な性質 (1) を満たす群を与える構成も存在している．それは群 G と H の**自由積**と呼ばれるものである．これは，G と H に同型な 2 つの部分群 G' と H' によって生成され，個別に G' と H' の中で成り立つ関係以外には，G' と H' の元の間にどんな関係もないような群のことである．厳密な定義は，自由群の定義（§14 例 6）のアナロジーとして与えることができる．特に，2 つの生成元上の自由群 S_2 は，2 つの無限巡回群の自由積である．

また別の種類のものを考えよう．集合としては，与えられた環 K 上の代数であるような可換環を，写像としてはその間の K 代数準同型を考える．直和 $A \oplus B$ と標準射影 $f: A \oplus B \to A$, $g: A \oplus B \to B$ は普遍写像性 (2) を満たす．しかし，自然な包含写像 $f: A \to A \oplus B$ と $g: B \to A \oplus B$ は存在するものの，普遍写像性 (1) のアナロジーが成り立たない．実際，元 $a \in A$, $b \in B$ に対して，$A \oplus B$ では常に $ab = 0$ となる．しかし，A, B と同型な部分環 A', B' を含む環 C で，この関係式 $ab = 0$ が必ずしも成り立たないようなものが存在するかも知れない．そのときは，必要な性質 (1) を満たすような $h: C \to A \oplus B$ は存在しない．実は，必要な性質を持つ環は存在し，それがテンソル積 $A \otimes_K B$（§12 例 3 参照）であることは容易にわかる．

最後に，考察したすべての場合において，普遍写像性 (1), (2) を満たす構成が一意的であることを確かめておこう．たとえば図式 (1) を考えることに

して，与えられた X, Y に対して，そのような 2 つの集合 R, S があったとしよう．すると図式



(3)

は可換でなければならない．それゆえ，$f = hu$ かつ $u = kf$ となって，$f = (hk)f$ が得られ，同様にして $g = (hk)g$ が得られる．(1) で写像 h が一意的であるという条件を，$S = R$ という自明な場合に適用すると，hk は R から自分自身への恒等写像であることが得られる[1]．同様にして kh が S から自分自身への恒等写像であることが示される．それゆえ R と S は同型である．

さて，これまでの例からモラルを抽出しよう．これまでの議論ではすべて，集合とその間の写像が問題となっていた．しかし，集合がどんな種類の元からなるのかとか，これらの元が写像によってどのように変換されるのかということはどこでも使われてはおらず，問題になっているのはただ，写像を合成することと，異なる写像を互いに比較することである．このことは，図式 (3) に関連した最後の議論の中で図式の可換性を使った際に，特に鮮やかに示されている．このようなアプローチが，圏の概念に公理化される．

圏（カテゴリー）$\mathcal{C}$ は以下のデータからなる．

(a) 集合 $Ob(\mathcal{C})$．この元を $\mathcal{C}$ の対象と呼ぶ．

(b) 任意の $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ に対する，集合 $H(A, B)$．この元を，$\mathcal{C}$ における A から B への射と呼ぶ[2]．

---

[1] ［訳註］$S = R$ の場合という言い方だと，少しわかりにくいかも知れない．たとえば，(3) で水平線で折り返したものを重ねて描いたとする．すると上方にも S がきて，中の R を忘れたとすれば，$kh : S \to S$ で，一意性から $kh = 1_S$ となる．もちろんこの裏返しで，$hk = 1_R$ がわかる．

[2] ［訳註］射は morphism の訳であり，本来は構造を保つ写像 (map) である準同型 (homomorphism) の抽象化であるが，単射，全射など写像を 1 文字で表わす「射」を使って訳語に当てることになっている．なお，$H(A, B)$ の記法だが，『岩波数学辞典第 3 版』では Hom (A, B) となっている．それは準同型の気分が強く，抽象性の意味からも，本書のようにするか，圏の概念が生まれた当時のように，$\mathcal{M}or(A, B)$ とする方がよいように思われる．

(c) 任意の $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$ と任意の $f \in H(A,B)$, $g \in H(B,C)$ に対する射 $h \in H(A,C)$．これを f と g の**合成**と呼び，gf と書く．

(d) 任意の $A \in Ob(\mathcal{C})$ に対する射 $1_A \in H(A,A)$．これを**恒等射**と呼ぶ．

この際，以下の 2 条件を満たしていなければならない．

$$h(gf) = (hg)f \qquad (f \in H(A,B),\ g \in H(B,C),\ h \in H(C,D)),$$

$$f1_A = 1_B f = f \qquad (f \in H(A,B)).$$

こうして圏の理論では，対象 $A \in Ob(\mathcal{C})$ は，その集合がどんな元からなっているのかということではなく，他の対象 $B \in Ob(\mathcal{C})$ との「関係」によって特徴付けられる．つまり第一義的なのはその「関係」であって,「構造」なのではない．

以下の圏の例では,「すべての集合」とか「すべての群」とかいうような概念を扱うときに生じる論理学的な矛盾は無視することにして,「素朴集合論」の立場に立つことにする.（少なくとも大半の専門家の意見では）これらの矛盾を回避することができるような（クラスの概念を含む）方法が，専門家によって確立されてきている．

例 1. 任意の集合を対象とし，集合の間の任意の写像を射とする圏 $\mathcal{S}et$.

例 2. 与えられた集合 X の任意の部分集合を対象とし，それらの間の包含写像を射とする圏（こうして，$H(A,B)$ は空であるか 1 点からなるかである）．この変化形として，X を位相空間として，任意の開集合を対象とし，それらの間の包含写像を射とする圏も考えられる．

例 3. 対象が位相空間で，射がその間の連続写像である圏 $\mathcal{T}op$. 変化形：対象が微分可能（または解析的）多様体で，射がその間の微分可能（または解析的）な写像とする．もう 1 つの重要な変化形：対象が基点 x_0 を持つ位相空間 (X, x_0) で，射が X の基点を Y の基点に写す連続写像 $f : X \to Y$, つまり $f(x_0) = y_0$ を満たすものとする．この圏を $\mathcal{T}op_0$ と書く．

例 4. ホモトピー同値を除いた位相空間の圏 $\mathcal{H}ot$. 位相空間の 2 つの連続写像 $f : X \to Y$ と $g : X \to Y$ は，一方が他方に連続的に変形できるとき，

つまり，連続写像 $h : X \times I \to Y$ で，$h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = g(x)$ を満たすものが存在するとき**ホモトピック**と言う（ここで，$I = [0,1]$ は単位区間）．またこのとき，f と g は同じホモトピー型に属すとも言う．空間 X と Y が**ホモトピー同値**である，または**同じホモトピー型に属す**と言うのは，連続写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ が存在して，gf が X の恒等写像 1_X とホモトピックで，fg が 1_Y とホモトピックであるときである．圏 $\mathcal{H}ot$ の対象はホモトピー型を除いた位相空間で，その間の射はホモトピー型を除いた連続写像である[3]．例 3 のアナロジーで圏 $\mathcal{H}ot_0$ は定義される．

例 5. 与えられた環 R 上の加群を対象とし，それらの間の R 準同型を射とする圏 $\mathcal{M}od_R$．$H(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N)$ である．アーベル群の圏 $\mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{A}b$ と書かれる．

例 6. 群の圏．対象は任意の群で，射はその間の準同型．

例 7. 環の圏．対象は任意の環で，射はその間の準同型．変化形：可換環だけとか，与えられた環 A 上の代数だけとする（後者の場合，射は A 代数準同型とする）．

例 8. 射が集合の間の写像として定義されない圏の例を与えよう．この例は，リー理論に関係して前節で述べた,「形式的群演算」に関係している．**形式群**の方がより標準的な用語である．形式群とは，2 つの変数の n 組 $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ に関する，任意の体 K に係数を持つ形式的ベキ級数

$$\varphi_i(X,Y) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$$

の組 $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ であって，

$$\varphi(X, \varphi(Y,Z)) = \varphi(\varphi(X,Y), Z),$$

$$\varphi(0,0) = 0, \quad \varphi(X,0) = \varphi(0,X) = X$$

[3] ［訳註］これまでも「～ を除いた」という言い方が，特に注釈をつけることなく使われてきたが，この辺り頻出するので少し説明しておこう．こういう言い方をするときは，～ にはもちろん同値関係または同値関係を与えるような対象が用いられる．たとえば今の場合のように「ホモトピー型を除いた位相空間」と言えば，同じホモトピー型を持つ位相空間を同値と見ての同値類を考えるということを意味するのである．

という条件を満たすもののことである．

数 n を形式群 φ の**次元**と言う．n 次元形式群 φ から m 次元形式群 ψ への**準同型**とは，n 変数の形式的ベキ級数の m 組 $F=(f_1,\ldots,f_m)$ で

$$F(0)=0, \qquad \psi(F(X),F(Y))=F(\varphi(X,Y))$$

を満たすもののことである．圏の対象を，与えられた体 K 上定義された形式群とし，射をその間の準同型とする．体 K の標数が 0 であれば，この圏の研究は，リー理論によって完全に，K 上の有限次元リー代数とその間の準同型の圏の研究に帰着する．しかし，体 K の標数 p が 0 でなければ，極めて特殊で新しい領域が生まれることになる．1 次元形式群の理論ですらすでに自明とはとても言えず，代数幾何，数論，トポロジーに重要な応用がある．

例 9. 1 つの対象 $\mathcal{O}$ しかない圏．この場合，圏は集合 $H(\mathcal{O},\mathcal{O})$ によって決まることになるが，この集合は結合的な演算（合成）と単位元を持てば，任意の集合でよい．この代数的概念は**単位元を持つ半群**と呼ばれる．

例 10. 双対圏 $\mathcal{C}^*$．任意の圏 $\mathcal{C}$ に対して，双対圏 $\mathcal{C}^*$ は対象は同じだが，$\mathcal{C}^*$ での射 $H(A,B)$ は，$\mathcal{C}$ での射 $H(B,A)$ によって与えられ，2 つの射 f と g の $\mathcal{C}^*$ での合成は，$\mathcal{C}$ での g と f の合成として定義される．圏を，対象がその点としてまた射がその間の矢印として表わされている 1 つの図式として表わせば，$\mathcal{C}^*$ は矢印の向きを逆にすると $\mathcal{C}$ から得られる．

双対圏の概念によって，圏の理論におけるある種の双対性に導かれる．すなわち，圏理論の任意の一般的な概念や主張は，双対圏 $\mathcal{C}^*$ に適用すれば，「矢印をひっくり返」して得られる，$\mathcal{C}$ における双対な概念や主張を与えることができる．

本節の最初に扱った例に戻ると，任意の圏において，集合の和と積のアナロジーとなるような，対象に対する演算を定義することができる．このために，任意の圏で意味のある図式 (1), (2) を使う必要がある．対応する対象は，もしそれが存在すれば，圏における対象の**和**および**積**と呼ばれる．すでに見たように，それらが常に存在するというわけではない．たとえば，和は有限群の圏においては存在しないが，すべての群の圏では存在する．しかしなが

ら，和や積が存在すれば，それらは同型を除いて一意的である（対象 A と B が同型と呼ばれるのは，$gf = 1_A$, $fg = 1_B$ を満たす射 $f \in H(A,B)$, $g \in H(B,A)$ が存在するときである）．上で与えた一意性の証明は，任意の圏において有効である．加群の圏では，和と積はともに加群の直和と一致すると言うことができる．また，群の圏では和は群の自由積と一致し，積は群の直積と一致し，可換環の圏では，和はテンソル積と一致し，積は直和と一致する．位相空間の圏では，和と積は集合の場合の演算と一致する．基点つきの位相空間の圏では，空間 (X, x_0) と (Y, y_0) の積は通常の積 $X \times Y$ に基点 (x_0, y_0) を考えたものであるが，和は，空間 X と Y を点 x_0 と y_0 で貼り合わせたいわゆるブーケ[4] $X \vee Y$ である．たとえば，2 つの円周のブーケは（図 40 の）8 の字である．

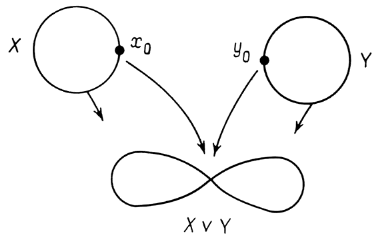


図 40

和と積の定義に使われる図式 (1) と (2) は，互いに矢印の向きを反対にすることによって得られるので，これらの概念は互いに双対であり，つまり，圏 $\mathcal{C}$ から双対圏 $\mathcal{C}^*$ に移る際に互いに移り合う．

代数学においてはよく，ある対象（群，加群，同相写像，...）が（何かしらの基底，座標系，... などによらず）完全に一意的に定義されるような状況（こと）が起こる．そのようなとき，普通,「自然な」とか「不変的な」とか「標準的な」とかの構成という言い方をしている．圏の言葉では，そのような状況は関手の概念を使って定式化される．

---

[4] ［訳註］『岩波数学辞典第 3 版』の用語では花束もしくは 1 点合併であるが，音訳のブーケというのも日本語の日常語になっているし，研究者にもその方が耳慣れている．

圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への共変関手とは,（同じ記号で書かれる）2 種類の写像, つまり写像 $F: Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$ と，任意の $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ に対する写像 $F: H(A,B) \to H(F(A), F(B))$ であって,

$$F(1_A) = 1_{F(A)} \qquad (A \in Ob(\mathcal{C})),$$

$$F(fg) = F(f)F(g) \qquad (fg \text{ が } \mathcal{C} \text{ で定義される限り})$$

を満たすものからなる.

たとえば, ベクトル空間の圏 $\mathcal{C}$ で, ベクトル空間をその r 重テンソル積へ写す写像 $E \to T^r E$ は明らかに線形写像と両立している．つまり，$f: E \to E'$ が線形写像であれば，$f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = f(x_1) \otimes \cdots \otimes f(x_r)$ は線形写像 $T^r E \to T^r E'$ を定義する．この 2 つの写像を合わせて，r 重テンソル積 $F = T^r$ という関手が定義されることは容易にわかる．これは $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への関手である.

反変関手もまた，$F: Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$ によって与えられるが，今度は任意の $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ に対して

$$F(1_A) = 1_{F(A)}, \qquad F(fg) = F(g)F(f)$$

（順序が逆）を満たす写像

$$F: H(A,B) \to H(F(B), F(A))$$

を定めている（これも順序が逆）．反変関手の典型的な例に，ベクトル空間をその双対ベクトル空間に移す演算がある.

例 11. A を可換環, M, N を A 加群とする. 加群 N を固定して, $F_N(M) = M \otimes_A N$ とおき，準同型 $f: M \to M'$ を，$F(f)(m \otimes n) = f(m) \otimes n$ で定義される準同型 $F(f): M \otimes_A N \to M' \otimes_A N$ に移す．すると，F_N は $\mathcal{M}od_A$ から自分自身への共変関手である．$G_N(M) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$ とおき，$f: M \to M'$ と $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M', N)$ に対して，合成 φf を $G(f)(\varphi)$ と書けば，G_N は $\mathcal{M}od_A$ から自分自身への反変関手である．R が非可換環であれば，$G_N(M) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ は $\mathcal{M}od_R$ から $\mathcal{A}b$ への反変関手である.

さらに幾つか例を挙げるが，関手は $Ob(\mathcal{C})$ に対してしか与えない．集合

$H(A,B)$ に対する作用は容易に推測できるだろう．

例 12. トポロジーの標準的な構成は関手である．位相空間 X の道の空間 $H(I,X)$ を考える．これは区間 $I=[0,1]$ から X への連続写像 $\varphi: I \to X$ の集合である．$H(I,X)$ の位相は，任意の開集合 $U \subset X$ に対して集合 $\{\varphi \mid \varphi(I) \subset U\}$ が開集合になるという要請によって定める．任意の写像 $f \in H(X,Y)$ は，道 $\varphi \in H(I,X)$ と合成することで道 $f\varphi \in H(I,Y)$ を定義するから，$H(I,X)$ は圏 $\mathcal{T}op$ から自分自身への共変関手になっている．これはむしろ，基点を持つ位相空間 (X,x_0) の圏 $\mathcal{T}op_0$ 上で考えられることが多い．その場合，$H(I,X)$ は $\varphi(0)=x_0$ を満たすような写像 $\varphi: I \to X$ だけからなるとされる．最後に，もし $H(I,X)$ の中で $\varphi(0)=\varphi(1)=x_0$ を満たすような写像 $\varphi: I \to X$ だけを考える（つまり，S^1 を基点つきの円周として，$H(S^1,X)$ を考える）なら，空間 X のループ空間 ΩX が得られる．これらの共変関手はすべて，自然に，例 4 のホモトピーの圏 $\mathcal{H}ot_0$ 上の関手に移される．

例 13. 位相不変量の多くは群であり，圏 $\mathcal{T}op$ か $\mathcal{H}ot$ から，群かアーベル群の圏への関手である．こうして，基本群 $\pi(X)$（§14 例 7）は，基点つき位相空間の圏から群の圏への共変関手である．(次の §21 で定義を述べる）ホモトピー群 $\pi_n(X), n \geq 2$，ホモロジー群 $H_n(X,A)$，コホモロジー群 $H^n(X,A)$ は同じ圏からアーベル群の圏への関手である．π_n と H_n は共変関手であり，H^n は反変関手である．これらの対象はすべてホモトピー同値に関して不変なので，圏 $\mathcal{H}ot$ に移される．

例 14. 集合 X 上の（たとえば実数値の）関数の空間 $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ は重要な関手である．ここでは多くの変化形が可能である．X が離散集合（たとえば有限集合）ならばすべての写像を考えるし，X が位相空間ならば連続写像を，X が測度を持てば 2 乗可積分関数を，などという具合である．写像 $f: X \to Y$ は関数 $\varphi \in \mathcal{F}(Y,\mathbb{R})$ を $\varphi f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ に移すので，$F(X)=\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ は，集合（または位相空間，または測度空間, ... ）の圏からベクトル空間の圏への共変関手である．つまり，$\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ が関手であるおかげで，集合 X の任意の変換が $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ の可逆な線形変換に対応し，さらにもし G が集合 X

の変換群であれば $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ 上に群 G の表現が得られる．特に $X=G$ で，G の自分自身の上の左作用を考えれば，$\mathcal{F}(G,\mathbb{R})$ 上に G の正則表現が得られる．

例 15. 任意の圏 $\mathcal{C}$ において，任意の対象 $A \in Ob(\mathcal{C})$ は，$\mathcal{C}$ から集合の圏 $\mathcal{S}et$ への共変関手 h_A を定義する．$h_A(X)=H(A,X)$ と置き，任意の $f \in H(X,Y)$ に対して写像 $h_A(f): H(A,X) \to H(A,Y)$ を f との合成として，つまり $h_A(f)(g)=fg\ (g \in H(A,X))$ として定義する．同様にして，$h^A(X)=H(X,A)$，$h^A(f)(g)=gf\ (f \in H(X,Y), g \in H(Y,A))$ は反変関手を定義する．これまでにも，圏 $\mathcal{M}od_R$ での関手 $h^N(M)=\mathrm{Hom}_R(M,N)$（例 11）や，$\mathcal{T}op_0$ での関手 $h_{S^1}(X)=\Omega X$（例 12）が出てきている．

関手 h_A と h^A は，集合に対して定義される構成を任意の圏に移そうとするような，非常に一般な状況において有効である．Φ が集合論的な構成で，ψ を圏 $\mathcal{C}$ での求める構成であるとするとき，2 つの関手 $h_{\psi(A)}$ と $\Phi(h_A)$ が同値であることを要求するのである.（h_A の代わりに h^A を使うと，別の「双対な」構成が得られる.）ここで，$\mathcal{C}$ から $\mathcal{S}et$ への 2 つの関手 F_1 と F_2 が同値であるとは，任意の対象 $X \in Ob(\mathcal{C})$ に対し，ある可逆な写像 $\varphi_X : F_1(X) \to F_2(X)$ が，任意の $Y \in Ob(\mathcal{C})$ と $f \in H(X,Y)$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & F_2(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F_1(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F_2(f)} \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & F_2(Y) \end{array}$$

が可換になるように定義できるときに言う．たとえば，ある圏での和 $A+B$ の定義が，関手 $h_{A+B}(X)$ と $h_A(X) \times h_B(X)$ との同値性を要請することに帰着することが，容易にわかる．積も同様に，関手 h^A と関係している．

応用として，圏 $\mathcal{C}$ における**群**（または**群対象**）という非常に重要な概念を述べよう．圏 $\mathcal{C}$ に積が存在する状況を想定する．対象 $G \in Ob(\mathcal{C})$ 上の群演算は射 $\mu \in H(G \times G, G)$ として定義される．逆へ写す演算は射 $\iota \in H(G,G)$ で与

えられるとする．最後に，単位元の存在の定式化は，$\mathcal{C}$ に終対象 $\mathcal{O} \in Ob(\mathcal{C})$ があると仮定すれば，一番簡単にできる．$\mathcal{O}$ が終対象とは，あらゆる $A \in Ob(\mathcal{C})$ に対して $H(A, \mathcal{O})$ がただ 1 つの元からなるときに言う（$\mathcal{S}et$ や $\mathcal{T}op$ では 1 点であり，$\mathcal{A}b$ では 0 だけからなる群であり，などである）．このとき単位元は射 $\varepsilon \in H(\mathcal{O}, G)$ として定義される．これら 3 つの射 μ, ι, ε に，積の結合性や他の群の公理を表わすいくつかの条件を課すことになる．これらの条件はある図式の可換性という形の要請として表わされる[5]．しかしここでそれらを挙げることは止めておく．というのは，これらすべての条件と同値なより単純な要請があるからである．つまり，任意の $A \in Ob(\mathcal{C})$ に対して，集合 $H(A, G)$ 上に群演算が与えられ（群への写像全体はまた群になる！），さらに任意の $f \in H(A, B)$ に対して合成写像 $H(B, G) \to H(A, G)$ が準同型になるという条件である．言い換えれば，関手 h^G は $\mathcal{C}$ から群の圏への関手でなければならない．

たとえば，リー群は（微分可能または複素解析的）多様体の圏における群対象である．

例 16. 基点 x_0 を持つ位相空間 X 上のループ空間 ΩX を考える（例 12 参照）．§14 例 7 で定義されたように，ループの合成は連続写像 $\mu: \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$ を定義し，ループの反転は写像 $\iota: \Omega X \to \Omega X$ を定義し，x_0 に留まるループは単位元を定義する．このデータは群を定義しない．たとえば，ループとその逆ループとの合成は単位ループに等しくはなく，単にそれにホモトピックなだけである．しかし，圏 $\mathcal{H}ot_0$（例 4 参照）では，容易に確かめられるように，群が得られている．

例 17. 「位相空間 X の閉部分集合 A を 1 点に縮める」操作を考えることにしよう．こう呼ばれるのは，集合論的には $X \setminus A$ に 1 つの余分な点 a をつけ加えたものである位相空間 X/A である．そのとき，縮小写像 $p: X \to X/A$ は，$X \setminus A$ 上では恒等写像であり，A は a に写すとして定義される．X/A の開集合は，その p による原像が X の開集合である集合として定義される．

位相空間 X の懸垂 ΣX とは，円柱 $X \times I$（ここで $I = [0, 1]$）から，そ

---

[5] ［訳註］その形のものは，たとえば『岩波数学辞典第 3 版』の「圏と関手」の第 M 項「圏における群」にある．

の上面 $X\times 0$ と下面 $X\times 1$ を 2 つの点に縮めて得られる空間のことである（図 41 参照）．

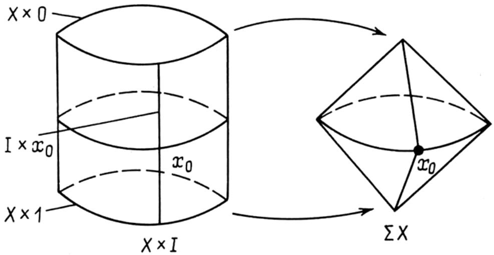


図 41

基点つきの位相空間の圏では，ΣX からさらに $x_0\times I$ を 1 点に縮めて得られる約懸垂 SX を考える．縮めた点を SX の基点とする．SX の性質は，$\mathcal{T}op_0$ や $\mathcal{H}ot_0$ での縮積 $X\wedge Y$ の演算を用いて述べるのが一番簡単である．その定義は，空間 (X,x_0) と (Y,y_0) に対して

$$X\wedge Y=X\times Y/(X\times y_0\cup x_0\times Y)$$

と置く．この演算が和の演算 $X\vee Y$（図 40 参照）に関して分配的であること，つまり，

$$\begin{aligned} X\wedge(Y\vee Z)&=(X\wedge Y)\vee(X\wedge Z),\\ (X\vee Y)\wedge Z&=(X\wedge Z)\vee(Y\wedge Z) \end{aligned}\tag{4}$$

を満たすことは容易に確かめられる．特に，約懸垂は $SX=S^1\wedge X$ によって与えられる．ここで，円周 S^1 は区間 I から点 0 と 1 を貼り合わせて得られる．$SS^1=S^1\wedge S^1=S^2$ であり，さらに一般に $SS^n=S^{n+1}$ であることが容易にわかる（ここで，S^n は n 次元球面である）．

円周 $S^1=I/\{0,1\}$ で，点 0 と点 1/2 を同一視すると写像 $S^1\to S^1\vee S^1$ が得られ（図 42），それゆえ，圏 $\mathcal{T}op_0$ や $\mathcal{H}ot_0$ では，写像

$$SX\to SX+SX$$

を与える（なぜなら，$\vee$ はこの圏での和であり，$SX = S^1 \wedge X$ であり，$\wedge$ が分配的であるから）．

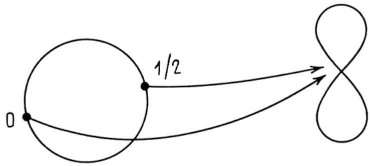


図 42

双対性により，双対圏での射 $\mu: (SX) \times (SX) \to SX$ が得られる．点 1/2 に関する S^1 の対称性に対応して円周を「反転」させると，写像 $S^1 \to S^1$ が，それゆえ $\iota: SX \to SX$ が得られる．全空間を 1 点に写すものは単位元を定める．こうして，SX が圏 $\mathcal{H}ot_0^*$ における群対象を定めることが，容易にわかる．

例 18. 例 16，例 17 で構成された圏 $\mathcal{H}ot_0$ や $\mathcal{H}ot_0^*$ における群対象は重要な不変量を定め，それらはすでに通常の群になっている．これは，G が圏 $\mathcal{C}$ の群対象ならば，任意の $A \in Ob(\mathcal{C})$ に対し，定義によって，集合 $H(A, G)$ が群であるという単純な理由に基づいている．同じように，$G \in Ob(\mathcal{C})$ が双対圏 $\mathcal{C}^*$ において群であれば，任意の $A \in Ob(\mathcal{C})$ に対して $H(G, A)$ は群である．それゆえ,（基点つきの）位相空間 R をどのように選んでも，任意の位相空間 X に対して，$H(X, \Omega R)$ も $H(SR, X)$ も群であり，圏 $\mathcal{H}ot_0$ から群の圏への関手である．すでにこういうものの 1 つが出てきている．つまり，R が 2 点からなるなら，$SR = S^1$ であり（図 43），$H(SR, X)$ は基本群 $\pi(X)$ になる．しかし，$S^n = SS^{n-1}$ であるから，任意の $n \geq 1$ に対して $H(S^n, X)$ も群である．これは $\pi_n(X)$ と書かれ，X の n 次ホモトピー群と呼ばれる．特に，$\pi(X) = \pi_1(X)$ である．

$n \geq 2$ に対して群 $\pi_n(X)$ は可換であるが，この理由もまた圏論的なものである．それは，$n \geq 2$ に対して $S^n = S(SS^{n-2})$ であり，任意の空間 R, X に対して群 $H(S(SR), X)$ が可換であるということである．実際，$SSR = S^1 \wedge S^1 \wedge R$ という表示から，図 42 の写像 $S^1 \to S^1 \vee S^1$ を，

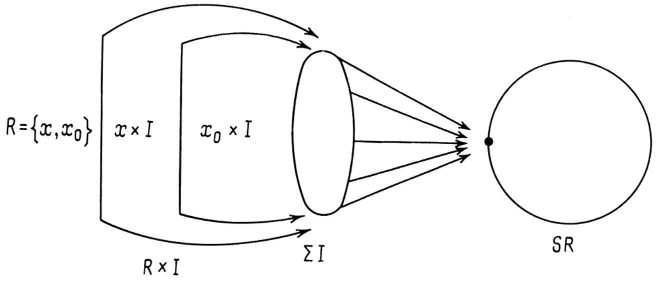


図 **43**

$SSR = S^1 \wedge S^1 \wedge R$ の最初の S^1 に使うか，2 番目の S^1 に使うかによって，2 つの写像

$$SSR \to SSR \vee SSR$$

を定義することができる．これから $H(S(SR), X)$ の上に 2 つの群演算が得られ，それを $\cdot$ と $*$ によって表わすことにする．これらには分配法則 $(f \cdot g) * (u \cdot v) = (f * u) \cdot (g * v)$ が成り立つ．このことは定義から，$\wedge$ の分配法則 (4) を使って非常に簡単に確かめることができる．さらに，どちらの演算も同じ単位元 e を持っている．するとこのことだけから形式的に，2 つの演算が一致し，可換であること

$$f \cdot g = (f * e) \cdot (e * g) = (f \cdot e) * (e \cdot g) = f * g,$$

$$g \cdot f = (e * g) \cdot (f * e) = (e \cdot f) * (g \cdot e) = f * g = f \cdot g$$

が得られる．

同様にして，任意の空間 X, Y に対して，群 $H(X, \Omega Y)$ と $H(SX, Y)$ は同型である．特に，任意の R, X に対して，$H(X, \Omega\Omega R)$ はアーベル群である．

同じ精神で，コホモロジー群の定義も与えることができる．このために，任意にアーベル群 A を選ぶとき，基点つきの空間の列 K_n, $n = 1, 2, 3 \ldots$ で，

$$\pi_m(K_n)=0 \quad (m\neq 0,n),$$
$$\pi_n(K_n)=A, \tag{5}$$
$$K_{n-1}=\Omega K_n \quad (\text{圏 } \mathcal{H}ot_0 \text{で考えると})$$

を満たすものが存在することを証明する．すると，前と同じように，集合 $H(X,K_n)$ がアーベル群になる．これを A に係数を持つ X のコホモロジー群と呼び，$H^n(X,A)$ と書く．(これはコホモロジー群を定義する最も自然な方法でもなければ，元来の定義でもない．それについては次節の最初に述べる．) n 球面 S^n に対しては

$$H^m(S^n,A)=0 \quad (m\neq 0,n),$$
$$H^n(S^n,A)=A,$$
$$S^n=SS^{n-1} \qquad (\text{圏 } \mathcal{H}ot \text{ で考えると})$$

となり，それゆえこの意味で（H^i の代わりに群 π_i でだが），球面 S^n は空間 K_n に類似なものである．

トポロジーの最も輝かしい達成の多く（たとえば群 $\pi_m(S^n)$ の研究に関連したもの）は，これまでの構成で示唆しようと努めてきたイデオロギーに基づいている．つまり，圏 $\mathcal{H}ot_0$ は，たとえば加群の圏に多くの点で似ている代数的概念として，かなりの程度取り扱うことが可能で，そこに代数的直観がうまく適用できるということである．

§ 21.　ホモロジー代数

A. ホモロジー代数概念のトポロジー的な起源

ホモロジー理論の代数的側面は複雑ではない．**鎖複体**と呼ばれるのは，アーベル群の列

$$\{C_n \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$$

（ほとんどの場合に $C_n = 0$ $(n < 0)$ とする）と，それをつなぐ**境界写像**と呼ばれる準同型 $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ の列である．**双対鎖複体**はアーベル群の列

$$\{C^n \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$$

と，**双対境界写像**または**微分**と呼ばれる準同型

$$d_n : C^n \to C^{n+1}$$

の列である．この際，鎖複体では境界準同型がすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ という条件，双対鎖複体では双対境界準同型が $d_n d_{n-1} = 0$ という条件が満たされていなければならない．こうして複体は，群の系というだけではなく，準同型の系でもあり，たとえば鎖複体は $K = \{C_n, \partial_n\}$ と書く．

鎖複体の定義に含まれる条件 $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ から，準同型 ∂_{n+1} の像 $\partial_{n+1}(C_{n+1})$ が準同型 ∂_n の核に含まれる，つまり $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$ であることがわかる．商群

$$\operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$$

を鎖複体 $K = \{C_n, \partial_n\}$ の n 次ホモロジー群と呼び，$H_n(K)$ と書く．同様に，双対鎖複体 $K = \{C^n, d_n\}$ に対しては $\operatorname{Im} d_{n-1} \subset \operatorname{Ker} d_n$ となり，群

$$\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n-1}$$

を n 次コホモロジー群と呼び，$H^n(K)$ と書く．

これらの概念が生まれた2つの基本的な状況を述べよう．

例 1. n 次元**単体**または n **単体**とは，ユークリッド空間で，$n-1$ 次元部分空間には含まれないような $n+1$ 個の点の凸包のことである．**複体**とは，辺単体全体でくっつき合った単体からなる集合であって，複体が単体を含むときはそのすべての辺単体を含み，各点が有限個の単体にのみ属すようなものである．位相空間として，複体は頂点の集合とどんな頂点が単体を構成するかというデータによって決定される．こうして，これは，生成元と関係式で群を定義するのと類似な，位相空間を与える有限の手続きである．複体と同相な位相空間 X を**多面体**と言い，X と複体との同相写像を X の**三角形分割**と言う．つまり，三角形分割とは，空間を単体に同相な断片に分け，「うまく」組み合わさっているようにすることである．図 44 には，球面の 1 つの三角形分割が描かれている．実際に見かけるような空間は，普通，三角形分割を持っている．たとえば，微分可能多様体はそうなっている．しかし，そのような三角形分割は多くあり，それはちょうど，群の生成元と関係式による表示が多くあるようなものである．

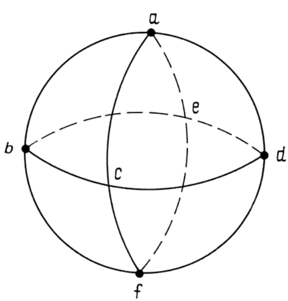


図 44

各複体 X に，鎖複体 $K=\{C_n,\partial_n\}_{n\geq 0}$ を対応させることができる．ここで，$C_n=\bigoplus\mathbb{Z}\sigma_i$ は，複体 X の n 単体 σ_i に対応する生成元を持つ自由 $\mathbb{Z}$ 加群である．準同型 ∂_n を定義するために，各単体 σ_i の向きづけ，つまりその頂点 $\sigma_i=\{x_0,\dots,x_n\}$ の順序が選ばれているとする．そのとき，

$$\partial_n \sigma_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varepsilon_k \sigma_i^k$$

と置く．ここで，σ_i^k は単体 $\{x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ であり，ε_k は，列 $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ から単体 σ_i^k の向きづけを定める頂点の列への置換が偶置換か奇置換かに従って，$\varepsilon_k = 1$ または -1 とする．群 C_n 全体には，加法性によって ∂_n を拡張する．$\partial_n \partial_{n+1} = 0$ という性質は容易に確かめられる．元 $x_n \in \mathrm{Ker}\, \partial_n$ を**サイクル**と言い，元 $y_n \in \mathrm{Im}\, \partial_{n+1}$ を**境界**と言う．群 $H_n(K)$ を**多面体** X **のホモロジー群**と言い，$H_n(X)$ と書く．元 $x \in H_n(X)$ の幾何学的な意味は，それが空間 X の閉じた n 次元の断片で，その 2 つの断片を境界に持つ $n+1$ 次元の断片が存在するときに同一視するというものである．たとえば，図 45 (a) では，トーラス上の閉曲線 c と c' は $H_1(X)$ の同じ元を定め，図 45 (b) では,「2 重トーラス」上の閉曲線 d は零元を定める．

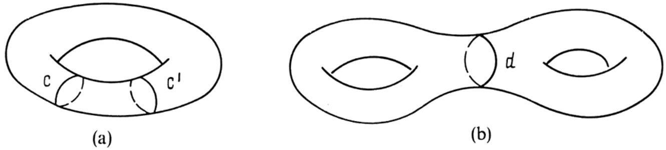


図 45

群 $H_n(X)$ の基本性質で，ここで与えた定義から考えると全く明らかではないことがある．それは，多面体 X の三角形分割にはよらず，位相空間としての性質のみによることである．さらにこれは，三角形分割可能な位相空間をホモトピー型を除いて考えた圏 $\mathcal{H}ot\ tr$ からアーベル群の圏 $\mathcal{A}b$ への共変関手を定めている．言い換えると，連続写像 $f : X \to Y$ は，写像 f のホモトピー類にのみ依存し，関手の定義の条件を満たすような準同型

$$f_{*n} : H_n(X) \to H_n(Y)$$

を導く．

この「関手的」性質こそが，トポロジーにおいて群 $H_n(X)$ がこれほどま

で役に立つ理由である[1]. これは, トポロジーから代数への「射影」を定めていると言える. 非常に簡単な例を挙げよう. n 次元球面 S^n に対して

$$H_0(S^n) \cong \mathbb{Z} \cong H_n(S^n), \qquad H_k(S^n) = 0 \quad (k \neq\ 0 \text{ または } n)$$

であることは容易に証明される.

一方, n 次元球 B^n は, 中心に放射状に縮小できるので, 1 点のホモトピー型を持ち, そのため

$$H_k(B^n) = 0 \qquad (k \neq 0)$$

となる.

ここで, 有名なブラウエルの固定点定理「あらゆる連続写像 $\Phi : B^n \to B^n$ は固定点を持つ」の証明をしよう. もしもそうなってなければ, 任意の点 $x \in B^n$ に対して, 点 $\Phi(x)$ から x へ半直線を引き, 球 B^n の境界である S^{n-1} との交点を $f(x)$ と書く. すると, f は連続写像で, $x \in S^{n-1}$ に対して $f(x) = x$ となる. つまり, i を（境界球面としての）S^{n-1} の包含写像 $i : S^{n-1} \hookrightarrow B^n$, 1 を S^{n-1} の恒等写像とするとき, $f \circ i = 1$ となっている. すると関手性から写像 $f_{*\,(n-1)} : H_{n-1}(B) \to H_{n-1}(S)$ が得られるが,（$H_{n-1}(B) = 0$ だから）これは零写像になってしまう. しかし一方, $f_{*\,(n-1)} \circ i_{*\,(n-1)} = 1$ であるから, 矛盾となる.

任意の多面体 X に対して上で構成した鎖複体 $K = \{C_n, \partial_n\}$ と並行して, 任意のアーベル群 A をとって鎖複体 $K \otimes_{\mathbb{Z}} A = \{C_n \otimes_{\mathbb{Z}} A,\ \partial_n\}$ と双対鎖複体 $\mathrm{Hom}\,(K, A) = \{\mathrm{Hom}\,(C_n, A),\ d_n\}$ を構成することができる.（$F(C) = C \otimes_{\mathbb{Z}} A$ が共変関手で, $G(C) = \mathrm{Hom}\,(C, A)$ が反変関手であることを思い出しておこう. §20 例 11 参照.）群 $H_n(K \otimes A)$ を $H_n(X, A)$ と書き, $H^n(\mathrm{Hom}\,(K, A))$ を $H^n(X, A)$ と書く. これらは, 群 A に係数を持つ X の**ホモロジー群**および**コホモロジー群**と呼ばれる. ホモロジーは共変で, コホモロジーは反変な, 圏 $\mathcal{H}ot\ tr$ から圏 $\mathcal{A}b$ への関手である. 群 $H^n(X, A)$ については すでに §20 の最後に述べてある.

例 2. X を微分可能多様体, Ω^r を X 上の r 次元微分形式の空間とする.

---

[1] ［訳註］もちろん, トポロジーのほとんどの分野でのホモロジー群の活躍が, 講義の聴衆や読者にとって熟知されているという了解のもとに語られた言葉である.

局所座標で

$$\varphi = \sum f_{i_1 \cdots i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

と書かれる形式 $\varphi \in \Omega^r$ の微分は

$$d\varphi = \sum df_{i_1 \cdots i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

という微分形式である．この表示は座標系の取り方によらず，準同型

$$d_r : \Omega^r \to \Omega^{r+1}$$

が定義される．$d_{r+1}d_r = 0$ という関係を確かめるのは難しくない．したがって $K = \{\Omega^r, d_r\}$ は双対鎖複体である．そのコホモロジー $H^r(K)$ は多様体 X のド・ラム・コホモロジーと呼ばれ，$H^r_{\mathcal{DR}}(X)$ と書かれる．ベクトル空間 E の外積代数 $\bigwedge(E) = \bigoplus \bigwedge^k(E)$（§5 例 12 参照）とのアナロジーで，$X$ 上のすべての微分形式の作る，次数つき環 $\Omega(X) = \bigoplus \Omega^r$ を考えることができる．外積をとるという演算は，この環から群

$$H^*_{\mathcal{DR}}(X) = \bigoplus H^r_{\mathcal{DR}}(X)$$

に持ち込まれ，これは次数つき環（さらに超代数）になる．

例 1 と例 2 の関係は，鎖に沿って微分形式を積分するという演算に基づいている．つまり，多様体 X の十分細かい三角形分割であって，あらゆる単体 σ_i がある座標近傍に含まれ，σ_i とユークリッド空間の標準単体 $\bar{\sigma}_i$ との間の同相写像 $f_i : \bar{\sigma}_i \to \sigma_i$ で望むだけ微分可能なほど十分滑らかなものを見つけることができる．そのとき（$\sigma = \sum n_i \sigma_i \in C_r$ と $\varphi \in \Omega^r$ に対して $\int_\sigma \varphi = \sum n_i \int_{\sigma_i} \varphi$ と置くことで），鎖 σ 上の積分の定義は単体上の積分 $\int_{\sigma_i} \varphi$ の定義に帰着される．そこで，微分同相 $f_i : \bar{\sigma}_i \to \sigma_i$ を使って，ユークリッド空間での単体 $\bar{\sigma}_i$ 上の微分形式 $f_i^* \varphi$ の積分，つまり，普通の重積分の計算に帰着する．

ストークスの定理（一般形）． 微分形式 $\varphi^{r-1} \in \Omega^{r-1}$ と鎖 $c_r \in C_r$ に対して

$$\int_{\partial C_r} \varphi^{r-1} = \int_{C_r} d\varphi^{r-1}$$

が成り立つ．

鎖上の積分は鎖に加法的に依存するから，この定理の証明は C_r がユークリッド空間の単体である場合に帰着される．この状況では，$r=1,\ 2,\ 3$ のときは有名なグリーン–ストークスの定理に帰着し，一般の場合にはまったく同じようにして証明される．$c\in C_r$ と $\varphi\in\Omega^r$ に対して

$$(c,\varphi)=\int_c\varphi$$

という記法を導入し，対 (c,φ) を $c\in C_r\otimes\mathbb{R}$ にまで拡張すると，ストークスの定理は，空間 $C_r\otimes\mathbb{R}$ 上の ∂ と Ω^r 上の d という 2 つの作用素の双対性という主張に変わる．このことから，$\partial c=d\varphi=0$ のとき，積 (c,φ) は，$c=\partial c'$ であるか $\varphi=d\varphi'$ であるかであれば，0 になることがわかるので，積は空間 $H_r(X,\mathbb{R})$ と $H^r_{\mathcal{DR}}(X)$ の上に移される．

ド・ラムの定理．このように構成された積はこの 2 つの空間の双対性を与え，それゆえド・ラム・コホモロジーは多様体のホモロジーを計算する解析的な方法を与える．

この定理には，空間 $H^r_{\mathcal{DR}}(X)$ は $H^r(X,\mathbb{R})$ と同型であるという同値な定式化がある．この同型によって，環 $H^*_{\mathcal{DR}}(X)$ の積（例 2 参照）を群

$$H^*(X,\mathbb{R})=\bigoplus H^r(X,\mathbb{R})$$

に持ちこむことができて，このおかげで $H^*(X,\mathbb{R})$ は環（**X のコホモロジー環**）になる．もちろん，$H^*(X,\mathbb{R})$ の積を定義する方法には，微分形式との関係を使わず，X が多様体である場合に限定されないものもある．

さて，双対鎖複体に限定して，複体の代数的理論に戻ることにしよう（鎖複体の理論は単に矢印の向きを反対にすれば得られるから）．複体 $K_1=\{C_1^n,d_n\}$ が複体 $K=\{C^n,d_n\}$ の**部分複体**であるとは，群 C_1^n が C^n の部分群であり，その間の微分が C^n 上で定義されている微分 d_n の制限として得られるときに言う．つまり $d_n(C_1^n)\subset C_1^{n+1}$ となっている．この状況で，d_n は商群 $C_2^n=C^n/C_1^n$ 上にも微分を導く．得られる複体 K_2 は K の K_1 による**商複体**と呼ばれ，K/K_1 と書かれる．

複体 $K,\ K_1,\ K_2=K/K_1$ のコホモロジー群は重要な関係で結ばれている．

C^n における d_n の核を $\operatorname{Ker} d_n$ と書くと，定義によって

$$H^n(K) = \operatorname{Ker} d_n / d_{n-1}(C^{n-1}) \text{ かつ } H^n(K_1) = (\operatorname{Ker} d_n \cap C_1^n)/d_{n-1}(C_1^{n-1})$$

となる．$C_1^{n-1} \subset C^{n-1}$ かつ $d_{n-1}(C_1^{n-1}) \subset d_{n-1}(C^{n-1})$ だから，$(\operatorname{Ker} d_n \cap C_1^n)\ /d_{n-1}(C_1^{n-1})$ の元はより大きな部分群 $d_{n-1}(C^{n-1})$ を法とする剰余類の元と考えられ，準同型 $i_n : H^n(K_1) \to H^n(K)$ が得られる．準同型 $C^n \to C_2^n = C^n/C_1^n$ を使えば，これと同じほどの明らかさで，準同型 $j_n : H^n(K) \to H^n(K_2)$ が得られる．多少明らかさに欠けるが，さらに 1 つの準同型が存在する．$x \in H^n(K_2)$ とすると，x に C^n/C_1^n における $\operatorname{Ker} d_n$ のある元 y が対応する．C^n における y の原像 $\bar{y}$ を考える．C^{n+1}/C_1^{n+1} において $dy = 0$ なのだから，$d\bar{y} \in C_1^{n+1}$ であり，複体の定義から $d\bar{y} \in \operatorname{Ker} d_{n+1}$ である．剰余類 $d\bar{y} + d_n C_1^n$ は $H^{n+1}(K_1)$ の元を定め，最初の元 x にしかよらず，補助的な元 y と $\bar{y}$ の選び方によらない．こうして準同型 $\delta_n : H^n(K_2) \to H^{n+1}(K_1)$ が得られることが容易に証明できる．

構成したすべての準同型を組み合わせると，無限の系列

$$\begin{array}{c} \cdots \xrightarrow{j_{n-1}} H^{n-1}(K_2) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \\ H^n(K_1) \xrightarrow{i_n} H^n(K) \xrightarrow{j_n} H^n(K_2) \xrightarrow{\delta_n} \\ H^{n+1}(K_1) \xrightarrow{i_{n+1}} \cdots \end{array} \tag{1}$$

が得られる．

この列は非常に重要な性質を持っており，それは次の極めて便利な代数的概念を使うと，とても簡単に定式化される．群と準同型の系列

$$\cdots \to A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

が完全であるとは，任意の n に対して準同型 f_{n-1} の像と準同型 f_n の核が一致するときに言う．この性質は，双対鎖複体 $\{A_n, f_n\}$ のコホモロジーが 0 であることと同値である．逆に言えば，任意の複体のコホモロジーは，完全系列からの離れ具合を測るものである．

$$0 \to A \xrightarrow{f} B$$

が完全系列であることは単に，f が群 A の B への埋め込みであることを意

味し，

$$B \xrightarrow{g} C \to 0$$

が完全系列であることは，g が群 C 全体の上への写像であることを意味している．最後に，

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

が完全系列であることは，単に $A \subset B$ かつ $C = B/A$ であることの言い換えに過ぎない．この形の完全系列を**短完全系列**と言う．

ここで，系列 (1) の基本性質を次のようなコンパクトな形で述べることができるようになった．

定理（コホモロジー完全系列）．

$$0 \to K_1 \to K \to K_2 \to 0$$

が双対鎖複体の短完全系列（つまり，$K_1 \subset K$ かつ $K_2 = K/K_1$）であれば，(1) は完全系列である．

この定理はほとんどトートロジー的に証明され，(1) は**コホモロジー完全系列**と呼ばれる．

X が三角形分割可能な位相空間で，その閉部分集合 Y が空間 X の三角形分割の単体いくつかをすべて合わせたようなものなら，それらに対して鎖複体 K_X と K_Y で $K_Y \subset K_X$ を満たすものを対応させることができる．それゆえ，鎖複体の短完全系列

$$0 \to K_Y \to K_X \to K_X/K_Y \to 0$$

が得られ，非常に簡単に確かめられるように，任意のアーベル群 A に対して，双対鎖複体の完全系列

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(K_X/K_Y, A) \to \mathrm{Hom}\,(K_X, A) \to \mathrm{Hom}\,(K_Y, A) \to 0$$

が得られる．

複体 $\mathrm{Hom}\,(K_X/K_Y, A)$ のコホモロジーには，すでに代数というより幾何の事実である解釈がある．つまり，$n \neq 0$ に対して

$$H^n(K_X/K_Y, A) \cong H^n(X/Y, A)$$

が成り立つ．ここで，X/Y は X から Y を1点に縮めて得られた空間である．もし複体 K_X の次元 $n=0$ での定義を少し変えて，群 C_0 を $\sum n_i = 0$ であるような0次元鎖 $\sum n_i\sigma_i^0$ の全体に制限すれば（X, Y, X/Y それぞれに対しても行う），上の主張は H^0 に対しても成り立つ．

得られたコホモロジー群を $\tilde{H}^0(X, A)$ と書くと，今度はコホモロジー完全系列に関する代数的な定理から，

$$\begin{aligned} 0 \to \tilde{H}^0(X/Y, A) \to \tilde{H}^0(X, A) \quad &\to \quad \tilde{H}^0(Y, A) \quad \to \cdots \\ \cdots \quad &\to \quad \tilde{H}^{n-1}(Y, A) \quad \to \\ \tilde{H}^n(X/Y, A) \to \tilde{H}^n(X, A) \quad &\to \quad \tilde{H}^n(Y, A) \quad \to \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

が完全系列であるという主張が得られる．ここで，$n > 0$ に対しては $\tilde{H}^n(X, A) = H^n(X, A)$ である．このことからたとえば，すべての n に対して $\tilde{H}^n(X, A) = 0$ であれば，$\tilde{H}^n(Y, A)$ と $\tilde{H}^{n+1}(X/Y, A)$ が同型になることがわかる．

この結果は次のように見ることができる．群 $\tilde{H}^0(X, A)$ は圏 $\mathcal{H}ot\ tr$ からアーベル群の圏への関手を定義する．空間 X, Y, X/Y に対して，この関手によって完全系列

$$0 \to \tilde{H}^0(X/Y, A) \to \tilde{H}^0(X, A) \to \tilde{H}^0(Y, A)$$

が得られるが，この右端に $\to 0$ をつけ加えると完全系列にはならない．しかし，無限個の新しい関手 $\tilde{H}^n(X, A)$ を導入することによって，完全系列 (2) に拡張することができる．この状況は頻繁に現れ，この特殊な場合から一般的な原理が推測される．つまり，もしアーベル群の圏に値を持つある重要な関手 $F(A)$ に対して，ある自然な状況において，たとえば

$$0 \to F(B) \to F(C) \to F(A)$$

という形の「短かい」完全系列が現れたとすると，$F^0 = F$ であるような関手の族 $F^n(A)$ で，(1) または (2) の形の無限の完全系列で関係しているようなものを定義することが，可能かどうかを考えるべきである．このように

して生まれる関手 $\mathbb{F}^n$ は，導（来）関手と呼ばれる．これは完全に新しい関手の構成法である．この節の残りでは，この幾分あいまいな原理の 2 つの実例を与える．3 番目の実現は次節 §22 のテーマである．

B. 加群のコホモロジーと群のコホモロジー

すでに §20 例 11 で，環 R 上の加群 A を固定すると，加群 M を「変数」として，$F(M) = \mathrm{Hom}_R(M, A)$ が R 加群の圏からアーベル群の圏への反変関手であることを見ている．したがって，加群の完全系列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0 \tag{3}$$

は準同型

$$F(g) : \mathrm{Hom}_R(N, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, A),$$

$$F(f) : \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(L, A)$$

を定める．

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, A) \xrightarrow{F(g)} \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{F(f)} \mathrm{Hom}_R(L, A) \tag{4}$$

が完全系列であることは容易に確かめられるが，右端に $\to 0$ をつけ加えると完全系列でなくなる．このことは準同型 $F(f)$ が全射とは限らないことを意味している．このためにはたとえば，$A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ として，$\mathbb{Z}$ 加群の完全系列

$$0 \to p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$$

を見ればよい．

しかしながら，系列 (4) を完全性を保ったまま延ばしていくことができる．このことは，§12 例 2 で導入した群 $\mathrm{Ext}_R(A, B)$ に関係している．群 $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ と同じように，群 $\mathrm{Ext}_R(A, B)$ は，A を固定すると，圏 $\mathcal{M}od_R$ から $\mathcal{A}b$ への共変関手 $G(B) = \mathrm{Ext}_R(A, B)$ を定め，B を固定すると，反変関手 $E(A) = \mathrm{Ext}_R(A, B)$ を定めることを示すことができる．完全系列 (3) によって，加群 M は $\mathrm{Ext}_R(N, L)$ の元と考えることができ，任意の準同型 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(L, A)$ は準同型 $G(\varphi) : \mathrm{Ext}_R(N, L) \to \mathrm{Ext}_R(N, A)$ を定める．特に，$G(\varphi)(M) \in \mathrm{Ext}_R(N, A)$ であり，φ の関数として，準同型

$\partial : \mathrm{Hom}_R(L, A) \to \mathrm{Ext}_R(N, A)$ が定まる．系列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, A) \xrightarrow{F(g)} \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{F(f)} \mathrm{Hom}_R(L, A) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}_R(N, A)$$

が完全であることを証明することができる．しかし，これをさらに長い系列

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_R(N, A) &\xrightarrow{F(g)} \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{F(f)} \mathrm{Hom}_R(L, A) \\ &\xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}_R(N, A) \xrightarrow{E(g)} \mathrm{Ext}_R(M, A) \xrightarrow{E(f)} \mathrm{Ext}_R(L, A) \end{aligned} \tag{5}$$

の中に埋め込むことができ（ここで，$E(g)$ と $E(f)$ は関手 $E(M) = \mathrm{Ext}_R(M, A)$ によって定義される準同型），これもまた完全系列になる！　これからもちろん，この系列を無限に延ばせるかも知れないという希望が生まれる．

実際に，$\mathrm{Ext}_R^n(A, B)$ と書かれるアーベル群の系を構成しよう．その際，n と変数 B を固定すると，これらは最初の変数に関して反変な関手で，加群の任意の完全系列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ に対して，これらは完全系列（すべての $n \geq 0$ に対して）

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \cdots & \to & \mathrm{Ext}_R^{n-1}(L, A) & \to \\ \to & \mathrm{Ext}_R^n(N, A) & \to & \mathrm{Ext}_R^n(M, A) & \to & \mathrm{Ext}_R^n(L, A) & \to \\ \to & \mathrm{Ext}_R^{n+1}(N, A) & \to & \cdots \end{array} \tag{6}$$

によって結ばれるようにする．ここで，Ext_R^0 は単に Hom_R であり，群 Ext_R^1 は Ext_R である．

このような関手の系を構成するアイデアは非常に単純である．この問題がすでに解かれたとするのだ．さらに，これらの関手がすべて 0 になるような，あるタイプの加群（これを P と書こう）を知っているとしてみよう．つまり，

$$\text{すべての加群 } A \text{ と } n \geq 1 \text{ に対して} \quad \mathrm{Ext}_R^n(P, A) = 0$$

となっているとする．さらに，加群 N を，この性質を持つ加群 P を含んだ完全系列

$$0 \to L \to P \to N \to 0$$

に取り込む（つまり，N を加群 P の準同型像として表わす）ことができたとする．すると，完全系列 (6) から，群 $\mathrm{Ext}_R^n(N, A)$ は $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(L, A)$ と

同型になり，求める関手の帰納的な定義が得られたことになる．

こうして，問題はまだ知られていない関手 Ext_R^n が 0 になるような加群 P を求めるということになる．しかし，これらの関手の一部は知られている，つまり，$\mathrm{Ext}_R^1 = \mathrm{Ext}_R$ だから，まず，これが 0 になるような加群を考えることから始めなければならない．任意の加群 A に対して，$\mathrm{Ext}_R(P, A) = 0$ となるような加群 P を**射影加群**と言う．もっと簡単に言うなら，これは，P がある加群 A の準同型像として表わされ，B を準同型 $A \to P$ の核とするなら，$A \cong P \oplus B$ となるということである（さらに，第 1 成分への射影 $A \to P$ が与えられた準同型 $A \to P$ に一致する）．このように，射影加群を考えることになって，半単純性の状況に戻ったかの感がある．最も簡単な射影加群の例は自由加群である．実際，$\mathcal{F}$ を環 R 上の自由加群で，$x_1, \ldots, x_n$ を $\mathcal{F}$ の自由生成系とする（生成元を有限個とするのは記述を簡単にするためだけである）．$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \mathcal{F} \to 0$ が完全系列ならば，g は加群 $\mathcal{F}$ の上への全射であり，それゆえ $g(y_i) = x_i$ を満たす元 $y_i \in M$ が存在する．$M' = Ry_1 + \cdots + Ry_n$ を，それらの元が生成する M の部分加群とする．$\{x_i = g(y_i)\}$ が自由生成系であることから，$\{y_i\}$ も自由生成系になる．このことから容易に，g が M' を $\mathcal{F}$ に同型に写し，$M = L \oplus M'$ $(L = \mathrm{Ker}\, g)$ であることがわかる．

射影加群のクラスで，すでにもとの計画を十分満たしていることがわかる．というのは，任意の加群は自由加群の準同型像であり，それゆえに射影加群の準同型像であるからである．

$$0 \to L \to P \to N \to 0 \tag{7}$$

を，加群 N の射影加群 P によるそのような表示とする．関手 $\mathrm{Ext}_R^r(L, A)$ がすでに $r \leq n-1$ に対して定義されているとして，

$$\mathrm{Ext}_R^n(N, A) = \mathrm{Ext}_R^{n-1}(L, A)$$

と置く．難しくないので，準同型 $\varphi : L \to L'$ に対応する準同型

$$\mathrm{Ext}_R^n(\varphi) : \mathrm{Ext}_R^n(L', A) \to \mathrm{Ext}_R^n(L, A)$$

の定義は省略する．群 $\mathrm{Ext}_R^n(L, A)$ と準同型 $\mathrm{Ext}_R^n(\varphi)$ がともに，加群 N

に対する完全系列 (7) の選び方によらず，適切に定義されていることを証明することができる．(n と A を固定すると) それらは反変関手になっており，完全系列 (6) によって関係し合っている．

これを n ステップ続けると，関手 Ext_R^n の帰納的ではない定義を得ることができる．このために，(7) の加群 L を同じような形に表わし，つまり，射影加群 P' を使って，完全系列 $0 \to L' \to P' \to L \to 0$ を作り，L' についても同じことをし，などと続ける．すると，射影加群 P_n による無限の完全系列

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{\varphi_n} \cdots \to P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} N \to 0 \tag{8}$$

が得られる．これを**加群** N **の射影的分解**と言う．これに関手 $\mathrm{Hom}_R(P, A)$ を働かせて，最初の項を落とすと．系列

$$\mathrm{Hom}_R(P_0, A) \xrightarrow{\psi_0} \mathrm{Hom}_R(P_1, A) \xrightarrow{\psi_1} \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P_n, A) \xrightarrow{\psi_n} \cdots \tag{9}$$

が得られる．これは必ずしも完全系列ではないが，双対鎖複体ではある ((8) で $\varphi_n \circ \varphi_{n+1} = 0$ となっていることから，関手の定義により，$\psi_{n+1} \circ \psi_n = 0$ が得られる)．この複体 (9) のコホモロジーが群 $\mathrm{Ext}_R^n(N, A)$ に一致するのである．

例 3. 群のコホモロジー． 群 $\mathrm{Ext}_R^n(N, A)$ が多くの代数的なまた一般の数学的応用を持っている最も重要な場合とは，環 R が群 G の整数環上の群環 $\mathbb{Z}[G]$ であるときで，このとき R 加群の圏は G 加群の圏と一致する．G 加群 A に対して，群 $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}, A)$ (ここで，$\mathbb{Z}$ は自明な G 作用を持つ加群と考えている) を群 G の A に係数を持つ n 次**コホモロジー群**と言い，$H^n(G, A)$ と書く．

加群 $\mathbb{Z}$ の射影的分解の構成は (または自由加群からなる分解でも)，特に難しいことのない技術的な問題である．結果として，複体 (8) と (9) が完全に具体的な形で得られる．2 つ目の複体を書き下そう．そこでは，($\mathrm{Hom}_G(P_i, A)$ に等しい) C^i は，群 G の n 個の元を変数とし，A に値を持つ任意の関数 $f(g_1, \ldots, g_n)$ からなっており，微分 $d_n : C^n \to C^{n+1}$ は

$$(df)(g_1,\dots,g_{n+1}) = g_1 f(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1,\dots,g_n)$$

と定義される．($f(g_2,\dots,g_{n+1}) \in A$ であり，A が G 加群であることを思い出す必要があって，これで第 1 項 $g_1 f(g_2,\dots,g_{n+1})$ の意味が定まる．)

最初のいくつかを書き下しておこう．

$n=0$: $f = a \in A$ かつ $(df)(g) = ga - a$,

$n=1$: $f(g) \in A$ かつ $(df)(g_1,g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$,

$n=2$: $f(g_1,g_2) \in A$ かつ $(df)(g_1,g_2,g_3) = g_1 f(g_2,g_3) + f(g_1,g_2 g_3) - f(g_1 g_2, g_3) - f(g_1,g_2)$.

こうして，$H^0(G,A)$ は，すべての $g \in G$ に対して $ga - a = 0$ であるような元 $a \in A$ の全体，つまり，A の G 不変元の集合となる．

$H^1(G,A)$ は，

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) + g_1 f(g_2) \tag{10}$$

という条件を満たす，A に値を持つ関数 $f(g)$ ($g \in G$) の群を，

$$f(g) = ga - a \qquad (a \in A) \tag{11}$$

という形の関数の群で割ったものとなる．もし A 上の G の作用が自明なら[2]，$H^1(G,A) = \mathrm{Hom}\,(G,A)$ となる．

$H^2(G,A)$ は，

$$f(g_1, g_2 g_3) + g_1 f(g_2,g_3) = f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1,g_2) \tag{12}$$

という条件を満たす，A に値を持つ関数 $f(g_1,g_2)$ ($g_1, g_2 \in G$) の群を，

$$f(g_1,g_2) = h(g_1 g_2) - h(g_1) - g_1 h(g_2) \tag{13}$$

という形の関数の群で割ったものとなる（ここで，h は A に値を持つ $g \in G$ の任意の関数）．

---

[2] ［訳註］(11) は $f(g) = 0$，(12) は $f(g_1 g_2) = f(g_1) + f(g_2)$ となるので．

これらの群が現れる状況の例をいくつか与えることにしよう．

例 4．群拡大． 群 Γ が正規部分群 N を持ち，その商群が $\Gamma/N = G$ であるとする．どのようにしたら，G と N から Γ を再構成できるだろうか？ この問題には，すでに§16 に出てきている（Γ を G の N による拡大と言うのだった）．これから，N がアーベル群の場合により詳しく述べる．そこで，N ではなく A と書くことにする．

任意の $\gamma \in \Gamma$ と $a \in A$ に対して，元 $\gamma a \gamma^{-1}$ はまた A に含まれる．さらに，写像 $a \mapsto \gamma a \gamma^{-1}$ は群 A の自己同型である．群 A の可換性から，γ を A に関する剰余類の中で取り換えても，元 $\gamma a \gamma^{-1}$ は変わらない．したがって，$\gamma a \gamma^{-1}$ は γ が属す剰余類 $g \in G = \Gamma/A$ にしかよらない．それゆえ，それを $g(a)$ と書く．こうして群 G は A に作用し，A は G 加群となる（群 Γ の演算のように，加法的ではなく乗法的に書かれる演算によってだが）．

各剰余類 $g \in G = \Gamma/A$ の代表元を任意に選んで，$s(g) \in \Gamma$ と書く．一般には $s(g_1)s(g_2) \neq s(g_1 g_2)$ であるが，A に関する同じ剰余類に属しているので，

$$s(g_1)s(g_2) = f(g_1, g_2)s(g_1 g_2) \tag{14}$$

を満たす元 $f(g_1, g_2) \in A$ が存在する．元 $f(g_1, g_2)$ の選び方は，任意と言うにはほど遠いものである．関係式 (14) を使って結合性の条件 $(s(g_1)s(g_2))s(g_3) = s(g_1)(s(g_2)s(g_3))$ を書き下すと，それらの元が

$$f(g_1, g_2 g_3)g_1(f(g_2, g_3)) = f(g_1 g_2, g_3)f(g_1, g_2) \tag{15}$$

という条件を満たすことがわかる．この条件は関係式 (12) を乗法的に書いたものになっている．G 加群としての A の構造と，条件 (15) を満たす元 $f(g_1, g_2) \in A$, $g_1, g_2 \in G$ の集まりが，すでに群 G の A による拡大 Γ を定めていることを，容易に確かめられる．しかしながら，この構成にはあいまいさが残っている．つまり，剰余類の代表元 $s(g)$ は任意に選んでいた．別の選び方があったとすれば，$s'(g) = h(g)s(g)$, $h(g) \in A$ の形をしている．この代表元を使って新しい元 $f'(g_1, g_2)$ の系が得られたなら，前の系と

$$f'(g_1, g_2) = f(g_1, g_2)h(g_1)g_1(h(g_2))h(g_1 g_2)^{-1}$$

という関係があることが容易に確かめられる．こうして関係式 (13) を考え

に入れると，群 G の A による拡大は，A の G 加群構造と群 $H^2(G,A)$ の元によって，一意的に与えられると言うことができる．

しばらくの間，拡大に対応する $H^2(G,A)$ の元が 0 である場合を考えよう．(14) によれば，これは，$s(g_1g_2)=s(g_1)s(g_2)$ を満たすように，Γ/A（の元である）剰余類の代表元 $s(g)$ を選ぶことができることを意味している．言い換えれば，これらの代表元が G と同型な群 G' をなし，任意の元 $\gamma\in\Gamma$ を一意的に $\gamma=ag'$, $a\in A$, $g'\in G'$ と書くことができる．この場合，**拡大が分裂し**，Γ が A と G の**半直積**であり，部分群 G' は Γ の中で A に**相補的**であると言う．たとえば，平面の運動群は，平行移動群と回転群の半直積であり，平行移動群に相補的な部分群として，ある固定点の周りの回転の群を選ぶことができる．一般の場合に，どのようにしたら分裂拡大における相補的部分群を一意的に定められるだろうか？　問題は，代表元の異なる選び方 $s'(g)=f(g)s(g)$, $f(g)\in A$ である．これらが群をなすために必要な条件は，容易にわかるように，関係式 (10) を乗法的に書き直した関係式

$$f(g_1g_2)=f(g_1)g_1(f(g_2))$$

を満たすことである．しかし，相補的部分群を別のそれに移す「自明な」方法がある．つまり，元 $a\in A$ による共役であり，G' は $G''=aG'a^{-1}$ に移される．この際 $f(g)$ が $f(g)ag(a)^{-1}$ となることは容易にわかる．関係式 (11) から，A と G の半直積において，A に相補的な部分群は（A の元による共役を除いて）群 $H^1(G,A)$ によって記述される．

例 5. 離散群のコホモロジー． X を 1 点のホモトピー型を持つ三角形分割可能な位相空間とし，群 Γ が X 上に，離散的かつ自由に作用している（§14 参照）としよう．この場合，空間 X の三角形分割で，Γ がその上に自由に作用するものを構成することができる．すると，X の n 次元鎖の群 C_n は自由 Γ 加群であり，鎖複体 $\{C_n,\partial_n\}$ は加群 $\mathbb{Z}$ の射影的分解（さらに自由 Γ 加群からなるもの）になっている．ここでいろいろな定義を単純に組み合わせると，任意のアーベル群 A を自明な作用を持つ Γ 加群と考れば，コホモロジー群 $H^n(\Gamma,A)$ には，商空間 $\Gamma\backslash X$ のコホモロジー群 $H^n(\Gamma\backslash X,A)$ に同型である（例 1 参照），という幾何的な実現がある．任意の群 Γ は，上述

の条件を満たす変換群として実現することができる．このような道筋で，群 $H^n(\Gamma, A)$ の幾何学的解釈が得られる．

特に，G が連結リー群，K がその極大コンパクト部分群で，$X = G/K$ であれば，この状況が実現される．そのとき，X はユークリッド空間と同相だからである．$\Gamma \subset G$ を，有限位数の元を含まない離散群とする．すると，Γ は剰余類の空間 G/K 上に左移動によって自由に作用し，

$$H^n(\Gamma, A) \cong H^n(\Gamma\backslash G/K, A)$$

であることがわかる．特に，$\Gamma\backslash G/K$ は有限次元空間だから，ある数以上のすべての n に対して $H^n(\Gamma, A) = 0$ である．群 $H^n(\Gamma, \mathbb{Z})$ に対して**オイラー標数**

$$\chi(\Gamma, \mathbb{Z}) = \sum(-1)^n \mathrm{rank}\, H^n(\Gamma, \mathbb{Z})$$

の概念を導入することができる．ここで，rank は加群のランクである．$\chi(\Gamma, \mathbb{Z}) = \chi(\Gamma\backslash G/K)$ であることがわかるが，ここで，右辺は空間 X のトポロジー的な**オイラー標数**で，

$$\chi(X) = \sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} H^q(X, \mathbb{R})$$

と定義されるものである．

特にこれは，G が体 $\mathbb{Q}$ 上の代数群で，Γ が算術部分群，つまり $G(\mathbb{Z})$ の有限指数の部分群である（§15C 参照）場合に適用することができる．この場合，$\chi(\Gamma, \mathbb{Z})$ には，たとえば，リーマン・ゼータ関数 ζ の整数点での値によって表わされるといった，微妙な算術的な意味がある．つまり，有限指数で，有限位数の元を含まない任意の部分群 $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{Z})$ に対して，

$$\chi(\Gamma, \mathbb{Z}) = [SL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] \cdot \zeta(-1) = -\frac{[SL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma]}{12}$$

となる．

最後に，もう 1 つの非常に重要な，群のコホモロジーの応用を述べておく．K を体とし，L/K を G をガロア群とする K のガロア拡大とする（§18A 参照）．体 L の 0 でない元の作る乗法群 L^* は G 加群であり，そのコホモロジー群 $H^n(G, L^*)$ は，代数と（K が代数的数体のときは）算術の双方の問題に非常に多くの応用を持っている．

C. 層のコホモロジー

X を位相空間，$\mathcal{C}$ を X の開集合を対象とし，その間の包含関係を射とする圏とする（§20 例 2 参照）．圏 $\mathcal{C}$ からアーベル群の圏への反変関手を，空間 X 上のアーベル群の**前層**と言う．このように，前層 $\mathcal{F}$ は，各開集合 $U \subset X$ に対してアーベル群 $\mathcal{F}(U)$ を，また，任意の 2 つの開集合 $V \subset U$ に対して準同型

$$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

を与えるもので，このとき，$\rho_U^U = 1_{\mathcal{F}(U)}$ と，$W \subset V \subset U$ のときは $\rho_W^U = \rho_W^V \rho_V^U$ を満たすとしている．

例 6. X 上の連続関数の前層 $\mathcal{O}_C$．定義により，$\mathcal{O}_C(U)$ は U 上のすべての連続関数の集合であり，ρ_V^U は関数の U から V への制限である．この例との関係で，一般の場合にも ρ_V^U を**制限準同型**と言うのである．

前層 $\mathcal{F}$ が**層**であるとは，任意の開集合 $U \subset X$ とその開集合の和としての任意の表示 $U = \bigcup U_\alpha$ に対して，次の 2 つの条件が満たされるときに言う．

1. $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して，すべての U_α に対して $\rho_{U_\alpha}^U s = 0$ であることから $s = 0$ が得られる．

2. $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ がすべての α, β に対して $\rho_{U_\alpha \cap U_\alpha}^{U_\alpha} s_\beta = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta} s_\beta$ を満たすなら，すべての α に対して $s_\alpha = \rho_{U_\alpha}^U s$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する．

与えられた空間の上の層はそれ自身圏をなす．層 $\mathcal{F}$ から層 $\mathcal{G}$ への準同型とは，すべての開集合 $U \subset X$ に対する準同型の系 $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ であって，すべての包含写像 $V \subset U$ に対して，図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\
{\scriptstyle \rho_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\rho}_V^U} \\
\mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V)
\end{array}$$

が可換であるもののことである．ここで，ρ_V^U と $\tilde{\rho}_V^U$ はそれぞれ $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ に

対する制限写像である．層 $\mathcal{F}$ が層 $\mathcal{G}$ の**部分層**であるとは，すべての開集合 $U \subset V$ に対して，$\mathcal{F}(U)$ が群 $\mathcal{G}(U)$ の部分群であるときに言う．

層の定義は，群 $\mathcal{F}(U)$ が局所的な条件によって与えられる性格のものであることがわかる．たとえば，連続関数の前層 $\mathcal{O}_C$ は層であり，もし X が微分可能多様体なら，微分可能関数の層 $\mathcal{O}_{diff} \subset \mathcal{O}_C$ は，$\mathcal{O}_{diff}(U)$ が U 上のすべての微分可能関数（つまり，与えられた次数 $n \leq \infty$ までの導関数を持つ関数）からなる前層である．同様に，X が複素解析的多様体ならば，解析関数の層 $\mathcal{O}_{an}$ は，$\mathcal{O}_{an}(U)$ が U 上の解析関数全体であるような前層である．これらの例が動機付けとなって，いろいろな型の空間の定義を統一する一般的な観点が得られる．その定義は，位相空間 X，X 上の連続関数の層の部分層 $\mathcal{O}$，そして（$\mathbb{R}^n$ の立方体とそこで微分可能な関数の層とか，$\mathbb{C}^n$ の多重円盤と解析関数の層とかのような）いくつかのモデル $\mathcal{M}$ で，各点 $x \in X$ に適当な近傍 U があって，U と層 $\mathcal{O}$ の U 上への制限がモデルのどれかと同型である，ことを満たすようなストックからなっている必要がある．この概念があれば，たとえば「特異点を持つ複素解析的多様体」（「複素空間」）のように，他の方法では定式化することが容易でないような対象を，自然に定義することができるようになる．適当に修正を行えば，任意の体上の代数多様体とか，またそれを遥かに一般化したスキーム（概型）の自然な定義も得られる．

その他の層の例には，微分可能多様体 X 上の微分形式の層 Ω^r（ここで，$\Omega^r(U)$ は U 上の r 次の微分形式の全体）やベクトル場の層がある．

例 7. X をリーマン面（1 次元複素解析的多様体）とし，点の集合 $x_1, \ldots,$ $x_k \in X$ と正整数の集合 $n_1, \ldots, n_k$ を任意にとる．形式的な 1 次式

$$D = n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k$$

を因子と言う（普通は $n_i \geq 0$ という条件は仮定しない）．因子 D に対応する層 $\mathcal{F}_D$ は，$\mathcal{F}_D(U)$ が，点 $x_1, \ldots, x_k$ で U に含まれるものにのみ極を持つ有理形関数で，x_j での極の位数が高々 n_j であるものの全体であるという条件で定義される

もし $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が層の準同型なら，$\mathcal{H}(U) = \operatorname{Ker} f_U$ によって，f の核と

呼ばれる，層 $\mathcal{F}$ の部分層が定義される．同じようにして像を定義しようとしてもうまくいかない．前層 $\mathcal{I}'(U) = \operatorname{Im} f_U$ は，一般には，層にならないのである．しかし，それを $\mathcal{G}$ の極小な部分層 $\mathcal{I}$ に埋め込むことができる．つまり，$\mathcal{I}(U)$ は，各点 $x \in U$ に対して，$\rho^U_{U_x} s \in \operatorname{Im} f_{U_x}$ となる近傍 U_x が存在するような元 $s \in \mathcal{G}$ からなるものとする[3]．この層 $\mathcal{I}$ は準同型 f の像と呼ばれる．核と像の概念が得られたので，加群の場合に与えた定義を逐語的に繰り返して，層の完全系列を定義することができる．層 $\mathcal{F}$ とその部分層 $\mathcal{G}$ に対して，$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0$ が完全系列になるような層 $\mathcal{H}$ を構成することができる．これを**商層** $\mathcal{H} = \mathcal{F}/\mathcal{G}$ と言う．

空間 X 上の層 $\mathcal{F}$ の最も重要な不変量は群 $\mathcal{F}(X)$ である．通常これは，局所的な条件から定まる大域的な対象の全体である．たとえば，微分形式の層に対しては多様体全体の上の微分形式のなす群であり，ベクトル場の層に対しては大域的なベクトル場の群である．例 7 では，リーマン面 X 上の至る所で有理形であって，高々 $n_1, \ldots, n_k$ の位数の極を点 $x_1, \ldots, x_k$ にのみ持つような関数全体のなす群である．層の準同型の定義から，層 $\mathcal{F}$ に $\mathcal{F}(X)$ を対応させることは，層の圏から（アーベル）群の圏への共変関手である．

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0$$

を層の完全系列とする．容易に確かめられるが，群の系列

$$0 \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{H}(X)$$

が完全であるが，右端に $\to 0$ をつけ加えると，完全になるとは限らない．この現象の例を挙げよう．X をリーマン球面，$\mathcal{O}_{an}$ を X 上の解析関数の層とする．層 $\mathcal{H}$ を定義するために，有限個の点の集合 $\Phi = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ をとり，各点 x_i に複素数の作る群のコピー $\mathbb{C}_i$ を与え，$\mathcal{H}(U) = \bigoplus \mathbb{C}_j$（ここで和は $x_j \in \Phi \cap U$ に対してとる）と置く．関数 $f \in \mathcal{O}_{an}(U)$ に点 x_j での値の集合 $\{f(x_j)\} \in \bigoplus \mathbb{C}_j$ を対応させると，像を $\mathcal{H}$ とする準同型 $\mathcal{O}_{an} \to \mathcal{H}$ が得られる．$\mathcal{G}$ をこの核とすれば，完全系列 $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}_{an} \to \mathcal{H} \to 0$ が得られる．ここで，リウヴィルの定理によって $\mathcal{O}_{an}(X) = \mathbb{C}$ であるが，定義

[3] ［訳註］もちろん，その制限 $\rho^X_U s$ と言った方がよいのだが，あまり細かいことを気にすると本書のよさが失われる．

によって $\mathcal{H}(X) = \mathbb{C}^k$ なのだから，$k > 1$ のときは $\mathcal{O}_{an}(X) \to \mathcal{H}(X) \to 0$ は完全系列ではない．

この状況はすでに議論したことがある．問題となるのは，空間 X 上の層の圏から群の圏への関手 F^n であって，$F^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ であり，かつ短完全系列 $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0$ に対して長い完全系列

$$\cdots \to F^{n-1}(\mathcal{H}) \to F^n(\mathcal{G}) \to F^n(\mathcal{F}) \to F^n(\mathcal{H}) \to F^{n+1}(\mathcal{G}) \to \cdots \quad (16)$$

が得られるようなものを構成することである．

関手 Ext^n を構成したときと同じ議論をしてみよう．必要な性質を持つ関手 F^n が構成されており，あるクラスの層（それを $\mathcal{Q}$ と書く）で，$n \geq 1$ に対して $F^n(\mathcal{Q}) = 0$ であり，層 $\mathcal{F}$ がそのような層 $\mathcal{Q}$ の部分層として表わされるようなものがわかっているとする．すると，完全系列

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q} \to \mathcal{H} \to 0$$

が得られ，(16) の形をした対応する完全系列が得られる．$F^n(\mathcal{Q}) = 0$ であることから，$F^n(\mathcal{F}) = F^{n-1}(\mathcal{H})$ となり，こうして関手 F^n の帰納的な定義が得られる．

さて，必要な性質を持つ層 $\mathcal{Q}$ の構成に移ろう．特にそのような層 $\mathcal{Q}$ は $F^1(\mathcal{Q}) = 0$ を満たすので，$\mathcal{Q}$ が完全系列 $0 \to \mathcal{Q} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \to 0$ に含まれていれば，$0 \to \mathcal{Q}(X) \xrightarrow{u} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{v} \mathcal{G}(X) \to 0$ は完全系列にならなければならない（系列 (16) の最初の 4 項を考えればよい）．この性質を持つ 1 つのクラスの層が知られていて，それは脆弱（ぜいじゃく）層と呼ばれている．層 $\mathcal{Q}$ が脆弱であるとは，すべての開集合 $U \subset X$ に対して制限写像 $\rho_U^X : \mathcal{Q}(X) \to \mathcal{Q}(U)$ が全射準同型であるときに言う．初等的な議論によって，$\mathcal{Q}$ が脆弱層で，$0 \to \mathcal{Q} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \to 0$ が層の完全系列であれば，$0 \to \mathcal{Q}(X) \xrightarrow{u} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{v} \mathcal{G}(X) \to 0$ は群の完全系列になる．

脆弱層の典型的な例は，$\mathcal{Q}(U)$ が U 上のすべての（実数値あるいは複素数値）関数の集合であるような層 $\mathcal{Q}$ である．層 $\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{diff}, \mathcal{O}_{an}$ はすべてこの部分層である．同じように，すべての層はある脆弱層の部分層である．こうして §21B で考えた状況と完全に類似な状況にあり，まずは帰納法によって新しい関手 F^n の定義を与えることができる．もし層 $\mathcal{F}$ が，脆弱層 $\mathcal{Q}$ に対して，層

の完全系列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q} \to \mathcal{G} \to 0$ に含まれていれば，$F^n(\mathcal{F}) = F^{n-1}(\mathcal{G})$; $F^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ となる．群 $F^n(\mathcal{F})$ が完全系列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q} \to \mathcal{G} \to 0$ の選び方によらないことが証明される．これを**層 $\mathcal{F}$ のコホモロジー群**と言い，$H^n(X, \mathcal{F})$ と書く．

群 $H^n(X, \mathcal{F})$ の定義に必要な n ステップを合わせると，帰納的でない定義を得ることができる．$\mathcal{Q}_i$ が脆弱層であるような層の完全系列

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q}_1 \to \cdots \to \mathcal{Q}_n \to \cdots$$

を**層 $\mathcal{F}$ の脆弱分解**と言う．関手 $F(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ をこれに適用して，第1項を除けば，双対鎖複体

$$\mathcal{Q}_0(X) \to \mathcal{Q}_1(X) \to \cdots \to \mathcal{Q}_n(X) \to \cdots$$

が得られ，このコホモロジーが群 $H^n(X, \mathcal{F})$ を与える．

層のコホモロジーの応用は，それらに関するある有限性定理に関係している．最初の有限性定理は，多くの状況において，層のコホモロジー群が0と異なることは有限しかないというものである．つまり，

定理． n **次元多様体** X **上の任意の層** $\mathcal{F}$ **に対して，** $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$**,** $q > n$ **である．**

第2の有限性定理は，すべての群 $\mathcal{F}(U)$ が（体 $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ の上の）ベクトル空間で，準同型 ρ_V^U が線形写像という場合に関係したものである．そのとき $H^q(X, \mathcal{F})$ もベクトル空間で，その次元を問題にすることができる．特に興味があるのは空間 $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ の次元で，通常最も重要な不変量である．一般には，この次元は最も簡単な場合であっても無限次元になる．たとえば，層 $\mathcal{O}_C$ や $\mathcal{O}_{diff}$ に対して，$H^0(X, \mathcal{O}_C)$ は X 上のすべての連続関数の空間であり，$H^0(X, \mathcal{O}_{diff})$ はすべての微分可能な関数の空間である．しかし，対応する空間が有限次元になるような重要な場合も存在する．たとえば，X をリーマン球面とすると，$H^0(X, \mathcal{O}_{an})$ は（無限遠点を含む）すべて点で正則な関数の空間である．リウヴィルの定理により，そのような関数は定数であり，つまり $H^0(X, \mathcal{O}_{an}) = \mathbb{C}$ は1次元である．同じことが任意の連結でコンパクトな複素解析的多様体 X に対して成り立ち，そこでは $H^0(X, \mathcal{O}_{an}) = \mathbb{C}$

である．この場合，すべてのコホモロジー群 $H^q(X, \mathcal{O}_{an})$ もまた $\mathbb{C}$ 上有限次元であることを証明することができる．同じことが，コンパクトな複素解析的多様体上の正則な微分形式や正則なベクトル場の層に対しても成り立ち，リーマン面 X がコンパクトなら例 7 の層 $\mathcal{F}_D$ に対しても成り立つ．ここで成り立つ一般的な定理を厳密に定式化することはせず，上に述べた例だけに留めておく．

X が有限次元多様体で，空間 $H^q(X, \mathcal{F})$ が有限次元であるようなあらゆる場合に，層 $\mathcal{F}$ の**オイラー標数**

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum (-1)^q \dim H^q(X, \mathcal{F}) \tag{17}$$

を定義することができる（上に述べた第 1 の有限性定理によって，有限項の和になっている）．

この新しい不変量の役割は 2 つある．第 1 に，多様体に内在的な関係を持つような，いくつかの標準的な層のオイラー標数は，多様体それ自身の不変量を与える．たとえば，コンパクトなリーマン面 X に対しては，p をリーマン面 X の種数として

$$\chi(X, \mathcal{O}_{an}) = 1 - p$$

となる．($1 - p$ が X のトポロジー的なオイラー標数 $\chi(X, \mathbb{R})$ の半分であることに注意しよう.) 同じように，任意のコンパクトな複素解析的多様体 X に対して，オイラー標数 $\chi(X, \mathcal{O}_{an})$ は，**算術種数**と呼ばれる重要な不変量を与えている．

一方，オイラー標数が「粗っぽい」不変量で，簡単に計算できることがわかる．多くの場合，興味があるのは，主に和 (17) の第 1 項の次元 $\dim H^0(X, \mathcal{F})$ なのだが，すでにこれがさらに微妙な問題である．がたとえば，残りの項が 0 であることが証明できたとすれば，解くことができる．こうして，コンパクトなリーマン面 X 上の因子 $D = \sum n_i x_i$ に付随した例 7 の層 $\mathcal{F}_D$ の場合，オイラー標数 $\chi(X, \mathcal{F}_D)$ は，点 x_i をどう選んだかにはよらず，数 $d = \sum_i n_i$ だけによっており，

$$\chi(X, \mathcal{F}_D) = \chi(X, \mathcal{O}_{an}) + d = 1 - p + d \tag{18}$$

となる．一方，$q \geq 2$ に対して $H^q(X, \mathcal{F}_D) = 0$ であり，もし $d > 2p-2$ ならば $H^1(X, \mathcal{F}_D) = 0$ となることが証明できるので，

$$\dim \mathcal{F}_D(X) = 1 - p + d \qquad (d > 2p-2) \tag{19}$$

となる．

$\mathcal{F}_D(X)$ は，点 x_i に高々 n_i 位の極を持つ，X 上の有理形関数の空間であった．等式 (19) は何よりもまず，そのような関数の存在定理になっている．このような関数を手にしているので，リーマン面からリーマン面への写像を構成することができ，その同型性などの問題を研究することができる．もっとも簡単な例として，$p=0$ かつ $D=x$（1 点）とする．(19) から，空間 $\mathcal{F}_D(X)$ は 2 次元になる．定数関数が 1 次元の部分空間をなすので，x に 1 位の極を持つ X 上の有理形関数 f が存在することがわかる．この関数によって定義される写像が，リーマン面 X とリーマン球面との同型，つまり，種数 0 のリーマン面がリーマン球面と解析的に同型（言い換えると，共形同値）であることを証明するのは難しくない．

例 8. 例 7 の層 $\mathcal{F}_D$ の類似物を，任意の n 次元複素解析的多様体 X の上に構成することができる．このために，点 x_i の代わりに $n-1$ 次元複素解析的部分多様体 C_i を考え，$D = \sum n_i C_i$ と置き，$\mathcal{F}_D(U)$ として U 上で有理形であり，部分多様体 $U \cap C_i \subset U$ に沿ってだけ $\leq n_i$ 位の極を持つ関数の全体をとる．このかなり一般的な設定に対しても同じ原理が成り立つ．部分多様体 C_i を $(2n-2)$ 次元サイクルと考え，D がホモロジー類 $\sum n_i C_i \in H_{2n-2}(X, \mathbb{Z})$ を定め，オイラー標数 $\chi(X, \mathcal{F}_D)$ がこのホモロジー類にしかよらないようにできる．($n=1$ に対しては，0 次元サイクル $\sum n_i x_i$ のホモロジー類は数 $d = \sum n_i$ である．）今や，オイラー標数の「粗っぽさ」は，それが，離散群 $H_{2n-2}(X, \mathbb{Z})$ の元のみに依存する位相不変量であるというように表わされる．この場合にも (18) に類似な式が存在するが，もちろんずっと複雑なものになる．関係式 (18) を**リーマン–ロッホの定理**と言い，さらに今述べた一般化に対しても同じ名前が使われる．

§ 22.　K 理論

A. 位相的 K 理論

さて，§5 の最後で導入した，位相空間 X 上のベクトル空間の族 $f: E \to X$ の概念を用いることにしよう．このとき，体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を考える．族 $f: E \to X$ から族 $f': E' \to X$ への準同型 $\varphi: E \to E'$ とは，連続写像 φ であって，各点 $x \in X$ に対してファイバー $f^{-1}(x)$ を ${f'}^{-1}(x)$ に移し，そのファイバー上では線形なもののことである．φ がファイバーの同型を定めるとき，φ は同型であると言う．

あらゆる開集合 $U \subset X$ とベクトル空間の族 $f: E \to X$ に対して，制限 $f^{-1}(U)$ は U 上のベクトル空間の族を定める．

最も簡単な例は，f が X への射影である族 $X \times \mathbb{C}^n$ で，これは**自明な族**と呼ばれる．これから考察する基本的なクラスの族は（複素）**ベクトル束**のクラスである．これは**局所的に自明な族**のことで，つまり，各点 $x \in X$ に対して，族 $f^{-1}(U)$ が自明な族 $U \times \mathbb{C}^n$ と同型であるような近傍 U が存在するものである．任意の連続写像 $\varphi: Y \to X$ と X 上のベクトル束 E に対して，E の**原像** $\varphi^*(E)$ が定義される[1]．点 $y \in Y$ 上の $\varphi^*(E)$ のファイバーを，点 $\varphi(y)$ 上の束 E のファイバーと同一視するのである．厳密な定義では，$\varphi^*(E)$ は，$\varphi(y) = f(e)$ を満たす点 $(y, e) \in Y \times E$ からなるものとして定義される．与えられた空間 X 上のベクトル束の同型類の集合は $\mathcal{V}ec(X)$ と書かれる．φ^* という操作により，$\mathcal{V}ec$ は位相空間の圏から集合の圏への反変関手になる．

集合 $\mathcal{V}ec(X)$ には，X の 1 点上のファイバーの直和やテンソル積をとることに帰着する，2 つの演算 $E \oplus F$ と $E \otimes F$ が定義される．演算 $\oplus$ は可換で結合的だが，明らかに逆元は存在していないので，群を定めてはいない．

---

[1] ［訳註］これは φ による**引き戻し**と呼ばれることが多い．

言い換えれば，$\mathcal{V}ec(X)$ は，ベクトル束 $X \times \{0\}$ を 0 とする（加法的に書かれた）可換半群になっている（§20 例 9 参照）．非負整数からすべての整数をとか，整数から有理数を構成するのと同じようにして，これを群に拡張することが可能である．ここで，$\mathcal{V}ec(X)$ の加法の，$a \oplus c = b \oplus c$ から $a = b$ が得られるわけではないという,「病理的な」性質に注目する必要がある．このことから，求める群はすべての対 (a, b), $a, b \in \mathcal{V}ec(X)$ からなるもので，対 (a, b) と (a', b') を $a \oplus b' \oplus c = a' \oplus b \oplus c$ であるような c が存在するときに同一視することにする．対の加法は成分ごとの和として定義する．対の類の集合が群を定義し，対 (a, b) の類が差 $(a, 0) - (b, 0)$ と等しいことは容易にわかる．得られた群を $K(X)$ と書く．ベクトル束 $a \in \mathcal{V}ec(X)$ に対 $(a, 0)$ の類を対応させると，準同型

$$\mathcal{V}ec(X) \to K(X)$$

が得られ，その際，$a, b \in \mathcal{V}ec(X)$ が $K(X)$ の同じ元に写されるのは，$a \oplus c = b \oplus c$ を満たす $c \in \mathcal{V}ec(X)$ が存在するときだけである．$K(X)$ が圏 $\mathcal{T}op$ からアーベル群の圏 $\mathcal{A}b$ への反変関手を定めることは容易にわかる．たとえば，X が 1 点であれば，$\mathcal{V}ec(X)$ は単に有限次元ベクトル空間からなり，それゆえ，$\mathcal{V}ec(X)$ の元は次元 $n \geq 0$ によって定まり，$K(X) \cong \mathbb{Z}$ となる．一般の場合，群 $K(X)$ の研究は「位相空間 X 上の線形代数」になる．

以下では，基点つきのコンパクトな位相空間の圏 $\mathcal{C}_0$ に限定することにする．これらに対しては，$\varphi : Y \to X$ がホモトピー同値であれば，φ^* が群 $K(X)$ と $K(Y)$ との同型を定めることが証明できる．こうして，関手 $K(X)$ はホモトピー同値を除いた（基点つきの）コンパクト空間の圏 $\mathcal{HC}_0$ に移すことができる．$x_0 \in X$ が基点で，$f : E \to X$ がベクトル束であれば，E にファイバー $f^{-1}(x_0)$ の次元を対応させると，準同型

$$\psi : K(X) \to \mathbb{Z}$$

が定義される（$\varphi : x_0 \hookrightarrow X$ が包含写像のとき $\psi = \varphi^*$ であると言える）．ψ の核を $\tilde{K}(X)$ と書く．この構成は，§21 の完全系列 (2) に関係した群 $\tilde{H}^0(X, A)$ の導入に類似したものである．

$$K(X) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}(X)$$

であることは容易に証明される．

$Y \subset X$ が閉部分集合で $x_0 \in Y$ であれば，包含写像 $f:(Y,x_0) \hookrightarrow (X,x_0)$ と，Y を 1 点に縮小する写像 $g:X \to X/Y$（ここで，Y の像を X/Y の基点と考える）は系列

$$\tilde{K}(X/Y) \to \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(Y)$$

の中の準同型を定める．これが完全系列であることを証明するのは難しくない．またしても §21 ですでに議論したこと，つまり，この系列を無限の完全系列に拡張するということが問題となる．

この場合，問題は次のようにして解くことができる．空間 X の約懸垂を SX と書く（定義は，§20 例 17 参照）．帰納的に，$\tilde{K}^0(X) = \tilde{K}(X)$ かつ $\tilde{K}^{-n}(X) = \tilde{K}^{-n+1}(SX)$ と定義する．すると，

$$\begin{array}{rcl} & \cdots & \to \tilde{K}^{-n-1}(Y) \to \\ \tilde{K}^{-n}(X/Y) \to & \tilde{K}^{-n}(X) & \to \tilde{K}^{-n}(Y) \to \\ \tilde{K}^{-n+1}(X/Y) \to & \cdots & \end{array}$$

は完全系列である（ここでは省略するが，適当に準同型 $\tilde{K}^{-n}(Y) \to \tilde{K}^{-n+1}(X/Y)$ を定義してということである）．この定義は次のように説明することができる．X の約懸垂の代わりに，ホモトピー型が同じ懸垂 ΣX を考える（この定義もまた §20 例 17 参照）．X 上の錐，つまり $(X \times I)/(X \times 1)$ を CX と書く．X を錐の底面 $X \times 0 \subset CX$ とみなすと，$\Sigma X = CX/X$ と言うことができる．錐 CX は（その頂点に縮小することができるので），1 点のホモトピー型を持つ．それゆえ，包含写像 $X \hookrightarrow CX$ は，加群 M を射影加群の準同型像として表わす，つまり，$f:P \to M$ によって表わすことのアナロジーであり，CX/X は $\operatorname{Ker} f$ のアナロジーである．するとこの定義は，§21B で与えた関手 Ext^n の帰納的な定義と似たものになっている．しかし，より正確には，それと双対になっており（空間 X の包含写像と加群 M への全射の位置が代わっている），そのことは $\tilde{K}^{-n}(X)$ の指数が負であることで示されている．

この「コホモロジー理論」の顕著な性質は周期的，つまり，

$$\tilde{K}^{-n}(X) \cong \tilde{K}^{-n+2}(X) \qquad (1)$$

が成り立つことである．この周期性定理の証明のためにここに留まっていることはできない．周期性により，関手 $\tilde{K}^n$ の列を自然に，条件 (1) を満たすようにして，正値の n に拡張することができる．こうして生まれる「コホモロジー理論」をK 理論と言う．もちろん，本質的には 2 つの関手 $\tilde{K}^0$ と $\tilde{K}^1$ があるだけであり，定義により，$\tilde{K}^0(X) = \tilde{K}(X)$ と $\tilde{K}^1(X) = \tilde{K}(SX)$ である．

関手 $K^1(X)$ のもう 1 つの解釈を与えよう．このためにもう一度，約懸垂 SX の代わりに通常の懸垂 ΣX を考え，それが 2 つの錘

$$C_1X = (X \times [0,1/2])/(X \times 0) \quad と \quad C_2X = (X \times [1/2,1])/(X \times 1)$$

を真ん中の底面 $X \times 1/2$ に沿って貼り合わせて得られることを思い出しておこう．それぞれの錘の上では,（錘は可縮だから）ベクトル束 E は自明な束に同型である．それゆえ ΣX 上のベクトル束 E は，束 $\mathbb{C}^n \times C_1X$ と $\mathbb{C}^n \times C_2X$ を $\mathbb{C}^n \times X$ に沿って貼り合わせて得られる．この貼り合わせは，$x \in X$ に対応する錘の底面の点の上のファイバー $\mathbb{C}^n$ の同型 φ_x によって，つまり，$x \in X$ に対する写像の族 $\varphi_x \in GL(n, \mathbb{C})$，また言い換えれば，連続写像 $X \to GL(n, \mathbb{C}), x \mapsto \varphi_x$ によって与えられる．この考察から，求めていた解釈

$$\tilde{K}^1(X) = \tilde{K}(SX) = H(X, GL) \qquad (2)$$

が得られる．ここで，$H(\ ,\ )$ は圏 $\mathcal{H}ot$ における射の集合で，幾分不確定に見える記号 GL は，n をいくらでも大きくして，$GL(n, \mathbb{C})$ への写像をとらなければならないことを示している．群 $GL(n, \mathbb{C})$ は次々と，$GL(n, \mathbb{C}) \to GL(n+1, \mathbb{C}), A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と埋め込まれ，それら全部の和をとると，この空間 GL が得られる．

K 理論は，他のどのコホモロジー理論とも同じように，ホモトピー的トポロジーから代数学へのある種の射影を与えている．この場合，射影は非常に忠実に元のものを再現している．つまり，K 関手はベクトル空間の外積と対称積の演算から生まれる作用素の全系列を持っており，これらの作用素が「関手的」

である．つまり，連続写像 $f : Y \to X$ に対応する写像 $\tilde{K}^n(X) \to \tilde{K}^n(Y)$ と両立している．すべての情報を集めてくると，矛盾が得られたりすることがよくある．そういうものが，ある種の写像の非存在を示す定理になる．たとえば，§19 の終わりで述べた定理，つまり，実数体上有限次元の多元体の次元が 1, 2, 4, 8 のどれかに限るという定理の最も簡単な証明が，K 理論から得られる．もう 1 つの有名な K 理論の応用は，n 次元球面上に 1 次独立なベクトル場が幾つあるか（つまり，任意の点 x でのベクトル $\theta_1(x), \ldots, \theta_k(x)$ が 1 次独立であるようなベクトル場 $\theta_1, \ldots, \theta_k$ がいくつあるか）という古い問題の解決である．その個数は，もし $n+1$ が（ちょうど）2^r で割れるなら，$4 \mid r$ のとき $2r$ 個，r が $4k+1$ か $4k+2$ の形のとき $2r-1$ 個，r が $4k-1$ の形のとき $2r+1$ 個になる．

しかし，K 理論の最も美しい応用は，楕円型作用素の指数の問題に関係したものである．微分可能多様体 X 上の任意有限位数の線形微分作用素は §7 例 3 で定義した．そういう作用素は，局所座標系では，

$$\mathcal{D} = \sum_{i_1+\cdots+i_n \le k} a_{i_1\cdots i_n}(x) \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} \tag{3}$$

という形をしている．ここで，$a_{i_1\cdots i_n}(x)$ は微分可能な複素数値関数である．微分作用素の $m_1 \times m_2$ 行列 $(\mathcal{D}_{ij})$ は自明なベクトル束上の微分作用素

$$\mathcal{D} : X \times \mathbb{C}^{m_1} \to \mathbb{C}^{m_2} \tag{4}$$

を定める．（局所自明性を使って）この定義を任意の微分可能なベクトル束の上に働く作用素 $\mathcal{D} : E \to F$ に拡張することは難しくないが，複雑になるだけなので (4) の場合だけに制限することにしよう．

作用素 (4) が多様体 X の 1 点で何を与えるのかを説明しよう．このために，(3) で点 x を固定し，係数 $a_{i_1\cdots i_n}(x)$ を定数にする必要がある．作用素 $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = \xi_i$ は多様体 X の接空間 T_x（§5 例 13 参照，体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である）の元であり，$\mathcal{D}$ は余接空間 T_x^* 上の多項式 $P(\xi, x) = \sum a_{i_1\cdots i_n} \xi_1^{i_1} \cdots \xi_n^{i_n}$ を与える．作用素 (4) はそのような多項式の作る，$m_1 \times m_2$ 行列 $(P_{ij}(\xi, x))$ を定める．k をすべての多項式 $P_{ij}(\xi, x)$ の次数の最大値とし，$\tilde{P}_{ij}(\xi, x)$ をそれらの k 次斉次部分とする．もし $m_1 = m_2 = m$ であり，$\xi \ne 0$ に対し

て $\det(\tilde{P}_{ij}(\xi,x)) \neq 0$ であれば，**作用素 (4) は点 x で楕円型**であると言い，それがすべての $x \in X$ で成り立っているとき X 上の**楕円型作用素**と言う．

このように，楕円型作用素 $\mathcal{D}$ は，各点 $x \in X$ で各ベクトル $\xi \in T_x^*, \xi \neq 0$ に対して，線形変換 $\tilde{P}_{ij}(\xi,x) \in GL(m)$ を定める．これを $\sigma_{\mathcal{D}}(\xi,x)$ と書く．写像 $(\xi,x) \mapsto \sigma_{\mathcal{D}}(\xi,x)$ は，$\xi \in T_x^*, \xi \neq 0$ に対して定義される．言い換えれば，多様体 $T_X^* \setminus s$ の上で定義される．ここで，T_X^* は余接束で，s は各ファイバーで零点を与えるもの（T_X^* の零断面）である．原点を除いたベクトル空間 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は $\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$ と同相であり，そのため球面 S^{n-1} と同じホモトピー型を持っている．それゆえ，$\sigma_{\mathcal{D}}(\xi,x)$ は X 上のある（ベクトル束ではない！）ファイバー束 S_X （ファイバーは球面 S^{n-1}）の上で定義され，写像

$$\sigma_{\mathcal{D}} : S_X \to GL(m,\mathbb{C}) \tag{5}$$

を与えると言うことができる．この写像は**楕円型作用素 $\mathcal{D}$ のシンボル**と呼ばれ，そのホモトピー類は $\mathcal{D}$ の最も重要な位相不変量である．(2) により，$\sigma_{\mathcal{D}} \in \tilde{K}^1(S_X)$ であり，これでもう K 理論との結びつきが得られている．

さて,「指数定理」の定式化に移ろう．(4) の作用素 $\mathcal{D}$ は，$A(X)$ を X 上の微分可能関数の環とするとき，写像 $A(X)^{m_1} \to A(X)^{m_2}$ を与える．その核を $\operatorname{Ker}\mathcal{D} \subset A(X)^{m_1}$ と書き，像を $\operatorname{Im}\mathcal{D} \subset A(X)^{m_2}$ と書く．商 $A(X)^{m_2}/\operatorname{Im}\mathcal{D}$ を余核と呼び，$\operatorname{Coker}\mathcal{D}$ と書く．楕円型作用素の理論において，楕円型作用素 $\mathcal{D}$ に対しては，$\operatorname{Ker}\mathcal{D}$ と $\operatorname{Coker}\mathcal{D}$ が有限次元空間であることが証明されている．言い換えると，$f \in A(X)^m$ に対する方程式 $\mathcal{D}f = 0$ の解空間が有限次元で，$f \in A(X)^m$ に対する方程式 $\mathcal{D}f = g$ が解を持つための g に課される（可積分）条件の数が有限である．この次元の差

$$\operatorname{Ind}\mathcal{D} = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{D} - \dim\operatorname{Coker}\mathcal{D} \tag{6}$$

を**楕円型作用素 $\mathcal{D}$ の指数**と言う．

指数定理は，楕円型作用素 $\mathcal{D}$ の指数がそのシンボルだけに依存するということで，$\sigma_{\mathcal{D}}$ を使って $\operatorname{Ind}\mathcal{D}$ を表わす具体的な公式を与えている．もう少し厳密に言うことができる．つまり，空間 GL には，他の何にも依存しないある特別なコホモロジー類がある．写像 $\sigma_{\mathcal{D}}$ によって，それらの類を多様体 S_X に移すことができる．一方で，S_X 上にも，作用素 $\mathcal{D}$ とはまったく無関係な，

ある特別なコホモロジー類が存在する．最後に，コホモロジー環 $H^*(S_X)$ には今述べたすべてのコホモロジー類の標準的な多項式があって，それが最大次元 $2n-1=\dim S_X$ の類 $\alpha_{\mathcal{D}} \in H^{2n-1}(S_X, \mathbb{Z})$ を与えている．位相幾何学では $H^{2n-1}(S_X, \mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ であることがよく知られていて，そのため類 $\alpha_{\mathcal{D}}$ はある整数によって与えられることになり，それが $\operatorname{Ind}\mathcal{D}$ に一致するのである．自明なベクトル束上の作用素について述べただけだが，指数定理は任意のベクトル束上の楕円型作用素についても成り立つ．

指数が作用素 $\mathcal{D}$ の（より細かい解析的な性質にではなく）シンボルだけによっているという定性的な事実だけからでも，§21 式 (17) のオイラー標数が粗っぽいというのと同じ意味で，差 (6) の「粗っぽさ」がわかる．このアナロジーは偶然ではない．複素解析的多様体とその上のいくつかの非常に簡単な作用素に対して指数定理を使ってみると，§21C で述べたリーマン–ロッホの定理が得られる．

B. 代数的 K 理論

§5 で，ベクトル空間の族 $f: E \to X$ と環 A 上の加群とのアナロジーに注意した．特に，すでに見たように，族 $E \to X$ は X 上の連続関数環 $\mathcal{C}(X)$ 上の加群を定める．このアナロジーで考えると，ベクトル束に対応するのはどんな加群なのだろうか？　多くの議論によって，これが有限ランクの射影加群であることが示されている（§21B 参照）．これについて，最初に述べられるのは次の結果である．

定理 I. X **をコンパクトな位相空間，** $E \to X$ **をベクトル空間の族とする．この族に対応する環** $\mathcal{C}(X)$ **上の加群** M **が射影加群であるのは，** E **がベクトル束であるときでかつそのときに限る．対応** $E \longleftrightarrow M$ **は** X **上のベクトル束と，環** $\mathcal{C}(X)$ **上の有限生成射影加群との間の 1 対 1 対応である．**

有限生成射影加群の，局所自明性のアナロジーであるような，ある代数的な性質を述べることができる．

このようにして（§22A のアナロジーで）半群 $\Pi(A)$ の導入が正当化され

る．$\Pi(A)$ の元は環 A 上の有限生成射影加群の類であり，演算は加群の直和である．§22A の議論を逐語的に繰り返すことによって，群 $K(A)$ と写像 $\varphi : \Pi(A) \to K(A)$ を構成することができる．この際，集合 $\varphi(\Pi(A))$ が $K(A)$ を生成し，2 つの射影加群 $P, Q \in \Pi(A)$ に対して，その像 $\varphi(P)$ と $\varphi(Q)$ が一致することと，$P \oplus R \cong Q \oplus R$ を満たすような第 3 の加群 $R \in \Pi(A)$ が存在することが同値になるようにできる．

任意の素イデアル $I \subset A$ に対して，環 A/I はある体 k に埋め込まる．つまり，I を核とする準同型 $A \to k$ が存在する．こうして，k は A 加群となり，$M \otimes_A k$ という演算が定義される．M が有限生成なら，$M \otimes_A k$ は k 上有限次元のベクトル空間である．整域 A と射影加群 M に対してなら，この空間の次元はイデアル I の選び方にはよらず，($I = 0$ のときの）加群 M のランク $\operatorname{rank} M$ に等しいことが証明できる（§5 参照）．関数 $\operatorname{rank} M$ は $K(A)$ に拡張されて，準同型 $K(A) \to \mathbb{Z}$ が定義されるが，その核は $\tilde{K}(A)$ と表わされる．$K(A) = \tilde{K}(A) \oplus \mathbb{Z}$ は容易にわかる．

いくつかの簡単な環に対して，群 $K(A)$ と $\tilde{K}(A)$ を見てみよう．

定理 II. **$A = k$ が体ならば，$\Pi(k)$ は k 上有限次元のベクトル空間であり，準同型 $K(k) \to \mathbb{Z}$ は次元で定義され，明らかに同型であり，それゆえ $\tilde{K}(k) = 0$ である．**

定理 III. **A が主イデアル整域ならば，任意の有限型の加群 M に対して $M \cong M_0 \oplus A^r$ となる．ここで，M_0 はねじれ加群である（§6 定理 II 参照）．M が射影加群なら，ある自由加群の直和因子となり，ねじれを持たない．それゆえ，$M_0 = 0$ かつ $M \cong A^r$ となり，これもまた $\tilde{K}(A) = 0$ を意味する．**

$a + b\sqrt{-5},\ a, b \in \mathbb{Z}$ の形の数のなす環 A を考える（§4 例 8 参照）．§4 で見たように，$P = (3,\ 2+\sqrt{-5})$ は主イデアルでない．$\varphi(P) - \varphi(A) \in \tilde{K}(A)$ かつ $\varphi(P) \neq \varphi(A)$ であること，したがって $\tilde{K}(A) \neq 0$ であることが容易に示される．

定理 IV. **A が任意の代数的数体の整数環であれば（§7 の終わり参照），**

$\tilde{K}(A)$ は有限群で，この体のイデアル類群に同型である（**§12 例 1 参照**）．特に，$a+b\sqrt{-5}$, $a,b \in \mathbb{Z}$ の形の数からなる環 A に対しては，$|\tilde{K}(A)| = 2$ である．

定理 V. X がコンパクトな位相空間であれば，この **B** 項で定義した群 $K(\mathcal{C}(X))$ は **A** 項で定義した群 $K(X)$ と同型である．

高次の K 関手 $K_n(A)$ の定義は，すでになじみになった方針に沿って進められる．まず，イデアル $I \subset A$ に対しても群 $K(I)$ が定義される（環にはいつも単位元があるとしていたので，上に与えた定義は使えない）．それから完全系列

$$K(I) \to K(A) \to K(A/I) \tag{7}$$

を構成し，最後に $K_0 = K$ であるような群 $K_n(A)$ を定義して，(7) を無限の完全系列

$$\cdots \to K_{n+1}(A/I) \to K_n(I) \to K_n(A) \to K_n(A/I) \to K_{n-1}(I) \to \cdots$$

に拡張する（代数的 K 理論では，関手 K_n は共変なので，指数は下の添え字として書かれる）．これらすべての定義の定式化はせず，このようにして生まれる群のいくつかの解釈をするだけにしておく．

群 $K_1(A)$ の解釈は，位相 K 理論で関係式 (2) に与えた解釈と類似したものである．連続写像 $\varphi: X \to GL(n)$ は，X の点の連続関数を係数とする可逆な行列，つまり $GL(n,\mathcal{C}(X))$ の元である（$\mathcal{C}(X)$ は X 上の連続関数の環）．このように，自然な出発点は群 $GL(n,A)$ であり，A 項でのように，これらの群の $n \to \infty$ での極限 $GL(A)$ である．しかし今度は式 (2) の中の文字 H の解釈も必要になる．つまり，写像 $\varphi: X \to GL$ はホモトピーを除いて考えられていたのだ．$GL(A)_0$ を $GL(A)$ の単位元の連結成分とするとき，このことは商群 $GL(A)/GL(A)_0$ を考えることを意味している．代数的 K 理論で，この部分群のアナロジーは何なのだろうか？　多くの問題で,「自明なように単位元に変形可能な」変換として，

$$E + aE_{ij} \tag{8}$$

の形の行列が現れてくる．ここで，E_{ij} は (i,j) 成分が 1 で他の成分が 0 の

行列であり，(8) の形の行列を**基本行列**と言う．(たとえば，群 $SL(n,\mathbb{R})$ の連結性の証明は，その任意の元が基本行列の積に分解されるということに基づいている．) 群 $GL(A)$ の中で，すべての基本行列から生成される部分群を $E(A)$ と書く．$E(A)$ が群 $GL(A)$ の交換子群になるという事実は，予想はできないがまったく初等的に証明できる．(この証明で本質的なのは，すべての群 $GL(n)$, $n=1,2,\ldots$ の和集合を考えているということである．このことは，個々の群に対しては一般には成り立っていない．) 特に，$GL(A)/E(A)$ は可換群になる．これで必要だった

$$K_1(A) \cong GL(A)/E(A)$$

が得られる．行列式をとることで準同型 $GL(A)/E(A) \to A^*$ と，さらに

$$K_1(A) = A^* \oplus SK_1(A), \qquad SK_1(A) = SL(A)/E(A)$$

という表示も得られる（まったく，加法と乗法の記号が混乱して，絶望的だ）．

線形代数の入門コースで，体 k に対しては $SL(n,k) = E(n,k)$ であることが知られている．このことは，本質的には，連立 1 次方程式のガウスの解法から得られる[2]．したがって $SK_1(k) = 0$ となる．A がユークリッド環ならば，有限型加群の構造定理の証明の基礎であった，§6 の主補題によって，同じ結果 $SK_1(A) = 0$ が得られる．群 K_1 が位相幾何学に現れるのは（最初に現れたのもここだが），有限アーベル群 G の群環 $A = \mathbb{Z}[G]$ の場合である．(その G はある多様体の基本群.) この場合にはよく，自明でなくなることがある．一般的に言えば，準同型 $GL(A) \to K_1(A)$ は「普遍行列式」である．この形なら，非可換環 A の場合にも一般化することができる．

群 K_2 は，$A = k$ が体の場合にだけ述べることにする．それは，任意の元 $a, b \in k$, $a, b \neq 0$ に対応する生成元 $\{a, b\}$ によって与えることができ，定義関係式は

$$\{a_1 a_2, b\} = \{a_1, b\}\{a_2, b\}, \tag{9_1}$$

$$\{a, b_1 b_2\} = \{a, b_1\}\{a, b_2\}, \tag{9_2}$$

[2] ［訳註］行列の行や列の操作をする基本変形のこと．和算の伝統もあってか，日本ではガウスの名前に触れる教科書は多くない．

$$\{a, 1-a\} = 1 \qquad (a \neq 0, 1) \tag{9_3}$$

という形をしている．

群 $K_2(k)$ の特に輝かしい応用は，体 k 上の有限ランクの多元体の記述である（ここに出てくる概念の定義は §11 と §12 例 3 を参照）．

任意の体 k に対して，ブラウワー群 Br (k) のすべての元の位数が有限なことを示すことができる．もし $\dim_k D = n^2$ なら（§11 定理 IV の直前の補題を参照），D に対応するブラウワー群の元の n 乗は 1 になる．このことから特に，§11 で導入された一般四元数代数 (a,b) が定義する群 Br (k) の元の位数が 2 か 1 であることが示される．

群 $K_2(k)$ とブラウワー群 Br (k) との関係を，これらの群の 2 次の元に対してだけ，そして体 k の標数が 2 でないという仮定のもとで，厳密に述べることにする．任意のアーベル群 C の中で，$c^2 = 1$ を満たす元 $c \in C$ の全体は明らかに部分群をなし，それを ${}_2C$ と書く．c^2 $(c \in C)$ の形の元も部分群をなし，それを C^2 と書く．群 $K_2(k)$ の，(9) の関係にある，任意の生成元 $\{a,b\}$ $(a, b \in k,\ a, b \neq 0)$ に一般四元数代数 (a,b) を対応させる．このとき，ブラウワー群でも関係式 (9) が成り立つことを確かめるのは難しくない．(9_1) と (9_2) を確かめるのはテンソル計算の簡単な演習問題である．(9_3) の証明は，代数 (a,b) が Br (k) の単位元を定めることと，$ax^2 + by^2 = 1$ が k に解を持つこととの同値性によるが（§11 (4) 参照），実際，$a \cdot 1^2 + (1-a) \cdot 1^2 = 1$ となっている！　こうして，準同型 $\varphi_2 : K_2(k) \to \mathrm{Br}\,(k)$ が得られる．$\varphi_2(K_2(k)) \subset {}_2\mathrm{Br}\,(k)$ はわかっているので，$\varphi_2(K_2(k)^2) = 1$ となる．結局，準同型

$$\varphi\ : K_2(k)/K_2(k)^2 \ \to\ {}_2\mathrm{Br}\,(k) \tag{10}$$

が得られる．

基本的な結果は準同型 **(10)** が同型であることである．これは非常に強い主張である．群 $K_2(k)$ の記述 (9) を見れば，群 ${}_2\mathrm{Br}\,(k)$ の生成元と関係式による表示が得られ，しかもまったく任意の体 k に対して成り立っている．$c^n = 1$ を満たす元 $c \in \mathrm{Br}\,(k)$ からなる群 ${}_n\mathrm{Br}\,(k)$ に対しても，同様な記述をすることができる．Br (k) ではすべての元の位数は有限なので，$\mathrm{Br}\,(k) = \bigcup {}_n\mathrm{Br}\,(k)$ となり，結局，この群全体の非常に具体的な記述が得ら

れる．

代数的 K 理論は，算術的な問題で大きな役割を果たしている．そのような応用の 1 つの方向を，ほのめかすだけだが，1 つの例で示しておこう．それは K 理論とゼータ関数の特殊値との関係である．古典的なリーマンのゼータ関数は級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

によって定義され，複素変数 s に関して全平面に解析接続される．それはオイラーの恒等式

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{11}$$

を満足する．ここで，積はすべての素数 p に関してとられている．q 個の元からなる有限体 $\mathbb{F}_q$ に対して，そのゼータ関数を

$$\zeta_{\mathbb{F}_q}(s) = \frac{1}{1-q^{-s}}$$

と定義すると，オイラーの恒等式 (11) は

$$\zeta(s) = \prod_p \zeta_{\mathbb{F}_p}(s) \tag{12}$$

の形に書き直すことができる．これは環の「関数的観点」（§4 参照）によく適っている．つまり，環 $\mathbb{Z}$ を，素数 p の集合の上の $\mathbb{F}_p$ に値を持つ関数の環と見ることになる．これから，より広いクラスの環に対して (12) に類似なゼータ関数の定義を推測できる．

さて，K 理論に戻ろう．有限体 $\mathbb{F}_q$ の場合は，すべての群 $K_n(\mathbb{F}_q)$, $n \geq 1$ が有限群であることが証明できる．その位数についての情報は

$$\frac{|K_{2m}(\mathbb{F}_q)|}{|K_{2m+1}(\mathbb{F}_q)|} = |\zeta_{\mathbb{F}_q}(-m)| \qquad (m \geq 1)$$

という美しい形に書き下すことができる．

整数環 $\mathbb{Z}$ の場合に，現時点で知られている事実から，奇数 $m > 0$ に対し，リーマンのゼータ関数の値 $\zeta(-m)$ と，比 $|K_{2m}(\mathbb{Z})|/|K_{2m+1}(\mathbb{Z})|$ の間の何らかの関係を推測する可能性を与えている．($\zeta(-m)$ は，$m > 0$ に対し

ては有理数であり，偶数 $m>0$ に対して 0 になること，そして $K_{2m}(\mathbb{Z})$ と $K_{2m+1}(\mathbb{Z})$ が有限群であることは知られている.)

$$\frac{|K_{2m}(\mathbb{Z})|}{|K_{2m+1}(\mathbb{Z})|}=|\zeta(-m)|\qquad(m\equiv 1\ (2))$$

という関係式は，最も簡単な $m=1$ のときにすでに成り立っていない．というのは，$|K_2(\mathbb{Z})|=2$, $|K_3(\mathbb{Z})|=48$ だが，$\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ だからである．しかし，2 のベキを除いて成り立つことを排除しているわけではない．どんな場合でも，数 $\zeta(-m)$ の分母は $|K_{2m+1}(\mathbb{Z})|$ を割ることが証明される．一方，p が素数で $p>m$ であれば，$|K_{2m}(\mathbb{Z})|$ を割る p のベキは，$\zeta(-m)$ の分子を割る p のベキより小さくはない（p に関する付加的な条件があればなのだが，その条件は常に成り立つと予想され，$p<125000$ に対しては確かめられている）．算術群（§21 例 5 参照）のコホモロジーに関係して，ゼータ関数の整数点での値がすでに出てきていることを思い出して欲しい．これは偶然の一致ではなく，群 $K_n(\mathbb{Z})$ との関係が実際に存在している．

K 理論と数論との関係は多岐にわたっているが，複雑な技術的な道具の導入が必要になるので，ここではこれ以上詳しく述べることはできない．

参考文献についてのコメント

本書全体は，代数的な概念や理論の体系的な叙述と，鍵となる例を語るという 2 つのテーマを織り交ぜるということに基づいている．これら 2 つのテーマに対する参考文献を別々に考えて挙げた．私の印象では，原則として，書物の初版は，第 2 版以降が色々な点で技術的に完備されているときにも，より新鮮でより興味深いものであることがある．このため，以下では常に，私が知っている初版を引用することにした．

群，環，加群，体といった代数の基本概念と，これらの概念に関連した基本的な理論で，半単純加群や半単純環の理論やガロア理論を含むものが，ファン・デル・ヴェルデン [104] の古典的な 2 巻本の教科書に述べられている．この素晴らしい本が世に出てから半世紀以上もの時が経ったが，いささかも古びることはなく，そこに述べられている問題の大半には，今日においてもよりよい記述があるわけではない．

代数の基礎概念を分離し，公理論的アプローチの精神で代数を鋳直す過程には 1 世紀以上もの時が掛かり，ガウス，ガロア，ジョルダン，クライン，クロネッカー，デデキント，ヒルベルトが関わっている．しかし，この 1 世紀以上かかった過程の結果を標準的な代数の言葉に定式化することは，おそらく 20 世紀の 20 年代の 10 年間のうちになされたと言ってよい．これに巨大な役割を果たしたのは E. ネーターであった．この時期にファン・デル・ヴェルデンの本が出版されている．代数学の全精神とその記述の仕方がどう変化したかを感じとるには，ファン・デル・ヴェルデンの本と，それ以前の世代が代数学を学んでいたヴェーバーの講義 [105] とを比べてみるとよい．

より新しい文献からは，ブルバキの『数学原論』シリーズの代数に関する巻 [16, 17] を挙げなければならない．これらの書物は初心者向けの教科書として使うこともできるような印象を与えるかも知れない．何しろ実際上は完全に記述はそこで閉じていて，しかも最も簡単な定義から始められているのだ．しかし，そういう印象はまったくの錯覚である．彼らの基本原則がテーマを最大限に一般化することであり，概念の導入の動機付けになった素材や，理論展開の方向性をまったく欠いていることからもわかる．しかし，専門家にとっては貴重な詳細の詰まった宝庫でもある．

もっと専門的な教科書からは，代数学者でない人の関心にも留意して書かれた，アティヤとマクドナルドの可換代数の教程 [5] を挙げておく．

§11 で与えた多元体の構造に関する専門的な結果は，ドイリングの概説書 [33] や A. ヴェイユの本 [106] の中に体系的に扱われている．

これまでの文献は主に本書の §2–§11 の題材を扱っている．§12 からは群論に移る．

その基礎については，もう一度ファン・デル・ヴェルデンの本と，(いくぶん広い観点から）H. ワイルの古典的なモノグラフ [107] の群論に関する章を勧めておく．群の例として運動群のような直観的な対象があるけれど，群の一般概念を展開し，群論を独立した分野にするためにもっとも刺激になった例は，有限集合の，さらに言えば，多項式の根の集合の置換の群であった．ラグランジュとアーベルに遡るアイデアはガロアの仕事 [45] の中で具体的な形をとることになった．この中で非常に明瞭に見てとれることは，ガロア群が具体的な置換の群として実現されるにも拘わらず，体論の問題が特に抽象群としてのガロア群に関係しているという理解が増していくことである．(ラグランジュはこのアイデアを「置換は方程式の形而上学である」と表現した.）もう 1 つ刺激になったのは，ガウス [46] が合同類と 2 次形式の類を体系的に使い，これらの上の演算を定義したことで，裏に何か一般的な概念が隠れているという感じを創り出したのであった．

群論をテーマとする最初の著作はジョルダンの本 [70] で，豊富な例とアイデアを含んでおり，今日もその価値を失っていない．この本では，有限変換群だけが扱われている．クラインとリーの業績を出発点として，無限離散群と連続群の考察が始まった．ここで始めてクラインの素晴らしい書物『19 世紀の数学の展開の講義』 [73] に触れることができる．ここで，今問題にしているこの時期の群論の発展が，もっとも影響力のあった参加者の視点から記述されている．しかしこの本は代数の他の分野（や数学全体）の発展に関しても大変興味深いことが沢山書かれている．

抽象的な群論に関する最初の書物は，有限群だけしか考察されていないが，バーンサイドの本 [21] である．これ以降の論述は，長い間，その改良に過ぎなかった．一番完全な形のものはシュパイザー [98] による．有限群論の現代的な教程にはフッペルト（とブラックバーン）の 3 巻本 [67, 68] がある．無限群の観点は，クローシュの本 [77] の最大の特徴である．生成元と関係式で群を定義する理論の興味深い歴史的概説が [24] にある．群論の論理学的な問題はアルゴリズムの概念と結びついている．この概念は 30 年代に生まれ，40 年代には数々の具体的な代数の問題がアルゴリズム的に解けないことの証明がなされるようになる．ここにある文献の研究に関しては自分の体験を引い合いに出すことができる．この領域は論理学者でない私にはまったく手の出せないような印象を引き起こしたが，それは書物 [116] に再現されている今はなき A.A. マルコフの講演を聞くまでのことで，そこではすべてが透き通るほどに明白になっている．論理学者でない数学者向けの，この種の問題の記述が，マニンの教科書 [81] にある．

リー群論に関する最初の本は，リーとエンゲルの 3 巻本 [79] である．この本には，新しい科学の分野の誕生の目撃証言を見るような興味深さがある．基本概念のさらに現代的な記述は L.S. ポントリャーギンの本 [90] にあり，さらに現代的な（つまり，座標系を使わないでも可能な）ものはシュヴァレーの本 [25] にある．美しい記述がホッホシルトの本 [64] にもある．

代数群に関してはシュヴァレーの概説記事 [28] や [12], [66], [99] のような本がある．単純リー群の分類については，コンパクト群に対しては [90] と [111]，複素リー群に対しては [94]，実リー群に対しては [50] にある．単純代数群の分類については，シュヴァレー・セミナー [27] と，[66] や [99] のような本にある．有限単純群については，概説記事 [103] とゴーレンシュタインの本 [49] を挙げる（しかしこの本では分類の証明はされておらず，その記述のあるものは今日まで 1 冊もない）．

有限群の表現論の基礎はフロベニウスによってなされた．彼の業績は全集 [44] で見ることができ，それはロシア語にも翻訳されている[1]．より現代的な記述が H. ワイルのモノグラフ [107] の関係した節やセールの本 [95] の最初の節（§1–§8）にある．コンパクト群の表現については，また，H. ワイル [107]，L.S. ポントリャーギン [90]，シュヴァレー [25]，D.P. ジェロベンコ [111] といった本を参照すること．A.A. キリロフの本 [72] は（リー）群の表現論についての広範な概説になっている．さらに最近の問題の紹介が，アティヤの編集した論文集 [6] に見られる．

H. ワイルの本 [109] は表現論に関する古典的な研究である．この本は，分野全体の以後の発展に強い影響を与えた．そこには，特に,「座標化」の概念や，本書で使った対称性と表現の概念の関係についてのアイデアが含まれている．

リー理論は実際上，上に述べたリー群に関するすべての教科書に含まれている．その異なる発展段階が [79], [90], [25], [64] を見るとわかる．

ケイリー代数（8 元数）については，フロイデンタールの概説 [43] を挙げる．その幾何学的応用についてはローソン [78] を参照のこと．

実数体上の（非結合的）加除代数（多元体）の基本定理の証明は [4] にある．

圏と関手の概念はアイレンベルグとマクレーンの仕事 [38, 39] の中で定式化され，そこでは，公理論的数学に対する新しい言葉としての意義が詳細に述べられている．圏理論の基本概念の体系的な叙述がヒルトンとスタンバック [61] の第 2 章にある．またある側面がグロタンディエクの論文 [51] の初めの方の節で考察されている．圏理論における群対象の概念の詳細な記述が，彼の本 [53] の第 0 章 §8 にある．

ホモロジー代数の基礎の体系的な記述は本 [61] にある．この分野の古典的な著作は H. カルタンとアイレンベルグの本 [22] だが，そこではもっと抽象的に書かれている．本書に近い精神で書かれている群のコホモロジー理論は，ブラウンの本 [20] にある．層のコホモロジー理論の一般概念は [102] に述べられている．主にリーマン–ロッホの定理への応用を扱った古典的な参考書は，ヒルツェブルフの本 [62] である．

本書で扱った K 理論の部分は，大体次の 2 つの概説書に含まれている．位相的 K 理論はアティヤ [4]，代数的 K 理論はミルナー [85] である．§22 の最後に述べた代数的 K 理論の問題に関しては，一般向けに書かれてはいないが，ススリンの概説 [100] を挙げることができる．

1 ［訳註］ソ連時代のロシアでは，数学ばかりでなく基礎科学の基本文献は網羅的に翻訳されていた．それがソ連の基礎科学の厚みを支えていた．

最後に，本書で多くの場合に（特に圏論やホモロジー代数を述べた節では）位相幾何学の概念や結果を使っている関係で，位相幾何学の文献を幾つか挙げておこう．本書に近い形（§20 で定式化された観点を参照）で書かれた参考書にドルド [36] やシュヴィツァー [101] がある．しかし，たとえば曲面の位相に関係したような，幾何学的直観がより重要な役割を果たすような場所では，ザイフェルトとトレルファールの古い本 [93] に代わるべきものが現れていない．微分可能多様体とその上の微分形式の積分の理論はシュヴァレーの本 [25] とド・ラムの本 [92] にある．

さて，個々の例を詳しく扱った文献に移ろう．おそらく本書の中で，例を使って一番豊かに説明されているテーマは，関数的な観点と代数的な観点との「双対性」であり，それは，数と関数とのアナロジーで，環の元を（最大または素）イデアルの集合上の「関数」として直観的に考えることであろう．これは非常に古いアイデアの総合である．実を言えば，すでに，実領域から複素領域への解析接続が，関数をその上で考えるべき「自然な」集合とは何かという問題を提起している．この方向への大きなステップはリーマン面の概念の創出であった．デデキントとヴェーバーの論文 [31] では，1 変数代数関数体（本書の記号では，代数曲線 C に対する体 $K(C)$ のこと）のリーマン面が純代数的に，体 $K(C)$ から K（さらに ∞ というシンボルを K に付加して）への「準同型」の集合として定義されている．彼らの論文と同じ雑誌の同じ巻に発表されたクロネッカーの論文 [76] には，代数的数と任意個の変数の代数関数を統合する理論の構築に対するプログラムが展開されている．数–関数の並行性のアイデアが，クラインの「講義」[73] に述べられている．デデキントとヴェーバーのアイデアに沿った 1 変数代数関数論の論述がシュヴァレーの本 [26] の中で構築されている．

点集合のトポロジーと論理学の問題に関連して，ブール代数がある型の位相空間上の，体 $\mathbb{F}_2$ に値を持つ連続関数の環として表現可能であることが証明された（これについては [10] 参照）．同じアイデアの，実数値もしくは複素数値の連続関数環への応用については，本 [47] で知ることができる．無限回微分可能な関数の環については [19] を，解析関数環については [65] を参照のこと．最後に，整数論と代数幾何を包摂し，整数論的問題に幾何的直観を働かせる可能性を与えるスキームの概念は，グロタンディエクによって展開された．これについては，彼自身の概説的論文 [52]，マニンの講義 [83]，それに私の本 [96] の第 5 章を参照のこと．整数論の領域に無限小の方法を移すこと，特に p 進数の構成はこのことに関連している．(代数的数の整数環の理論においてもだが）基本的な入門書としては本 [15]，より深い理論については本 [106] を参照のこと．

もう 1 つの「全体にわたる」テーマは，平面や射影空間に座標を入れるという，狭い意味での「座標化」である．これ（特にデザルグの公理やパッポスの公理の役割）については，ヒルベルトの本 [59] を，より代数的な形については [3] や [7] の本を参照のこと．連続幾何はフォン・ノイマンの本 [87] に説明されている．

本書で何度も出てきた有限体は，ガロアによって発見された．彼の著作 [45] にはす

でに，その完全な理論が含まれている．その符号理論への応用（特に有限体上の代数幾何の応用）は [48] や [82] の概説で述べられている．

可換な微分作用素の理論における代数的方法は，本 [69] の §5.5 に述べられた結果から始まった．この結果は忘れられたが，数 10 年後に再発見された．現代的な概説については [86] を参照のこと．

超積については [8] を参照のこと．

加群のテンソル積，外積，対称積は [75] と [16] で定義されている．完備化の性質は [5] に述べられている．

多くの例がクリフォード代数に関係している．これは 19 世紀にクリフォードによって導入され（彼の選集 [29] 参照），20 世紀になり（特殊な場合に）ディラック [35] によって，2 階の線形微分作用素を行列係数の 1 階の作用素の平方として表わそうとする試みに関係して，再発見された．詳しい現代的な記述が [17] にある．

群の概念に関係した例に移ろう．ワイルの優美な本 [110] は対称性の概念の検討に費やされている．対称性と力学における保存法則との関係（E. ネーターの定理）については [30] か [2] を参照のこと．物理法則の対称性については，興味深いファインマンの講義 [41] に述べられている．

変換群としては実現されない群の例として，群 $\mathrm{Ext}(A, B)$ は引用した任意のホモロジー代数の教程で，ブラウワー群は [33] で，イデアル類群は [5] で見られる．

正多面体とその有限運動群との関係については，アダマールの本 [54] に詳しく考察されている．複素平面の 1 次分数変換群の有限部分群は，彼のもう 1 つの本 [55] にある．格子の対称性は本 [74] で解析されている．

鏡映で生成される有限群の詳細な解析は，ブルバキの本 [18] に含まれている．§13 で導入された，これらの群を分類するのに用いられた同じ図式が，他の一連の分類問題にも現れることは驚くべきことである．(それらのうちで最も重要なのは単純なコンパクト・リー群と単純複素リー群の分類である.）これらの関係の概説が論文 [58] にある．

幾何学的な結晶学は，B.N. デローネ他著の [32] に述べられている．より現代的な記述が [74] にあり，そこでは装飾群と n 次元結晶学も考察されている．この問題は，ヒルベルト他著の [60] の 1 つの章も扱っている．17 すべての群を特徴付ける装飾の完全なリストが A.I. マリツェフの概説 [80] の中にある．

すべての結晶群は，E.S. フョードロフ（1889 年）とシェーンフリース（1890 年）によって（互いに独立に）分類された．その翌年，E.S. フョードロフは，すべての装飾群を数え上げ [40]，それは問題の，結晶学者にとってはなはだ自明でないような幾何学的性格を示している．驚くべきことに，H. ワイルのような広く知られた数学者が [110] (p.103–4) で次のように書いているのである.「 ... 変換群の数学的概念は 19 世紀になるまで創案されることはなかったが，これを基礎にして初めて．具体的にではないが古代エジプトの職人に知られていた 17 種の型の対称性がすべての可能性を

尽くしていることを証明することができる．不思議なことに，その証明が行われたのは遅く，現在スタンフォード大学で教えている G. ポーヤによって 1924 年になされたのである.」さらに不思議なことがある．上で H. ワイルから引用したことが，最近ある数学雑誌 [89] の数巻にわたる一連の記事のテーマになった．しかし，議論のテーマとなったのは，エジプトの職人が 17 すべての対称性を知っていたという主張であるのに，それらの分類に関する数学的問題を誰が解いたかについてのとても重要な主張に，議論の関係者の誰も注意を払わないのである．

ロバチェフスキー平面の離散運動群と，そのリーマン面の理論との関係については，アダマールの本 [55] を参照のこと．基本群，被覆空間，結び目群に関しては，古風だが幾何的な本 [93] を挙げよう．

群論とトポロジーのアルゴリズム問題の関係については，[42] を参照のこと．

組み紐群を（名前はつけなかったが）最初に考察したのはフルヴィッツで，その際（今日通常行われている定義のような）幾何学的な形と基本群としての両方の形で考察されたのだが，それからずいぶん後になって，それぞれの形のものが別々に再発見されたのである．これについては [24] を参照のこと．

リウヴィルの定理におけるトーラスの役割については，アーノルドの本 [2] を参照のこと．コンパクトな古典群は [25] に丁寧に整理されている．他のリー群の例と，特別な次元でのそれらの間の関係については [75] を参照のこと．

代数群とその離散群との間の関係については，A. ボレルの概説 [13] を参照のこと．

表現論との関係で §17 の例として挙げられた，ヘルムホルツ–リーの理論は，魅力的だがいくぶん読みにくい H. ワイルの本 [108] の内容をなしている．

群 $O(4)$ の表現と 4 次元リーマン多様体の曲率テンソルに関係した例については，[9] を参照のこと．

群 $SU(2)$ の表現とその量子力学との関係は，H. ワイルの本 [107] に述べられている．

群論の応用として挙げられた例について．ガロア理論は [104] に述べられている．カプランスキーの本 [71] は微分ガロア理論の短い序論になっている．p 進数体の拡大体のガロア理論に現れる群（いわゆるデョミョーシキン群）で，曲面の基本群と奇妙な並行性を持つ群の例は，本 [23] で検討されている．不変式論への応用については本 [34] を参照のこと．

素粒子の分類への群表現の応用に関しては，著者がこの理論の知識を得るのに読んだ文献を挙げることしかできない．主なものはボゴリューボフの講義 [11] である．ダイソンの概説記事 [37] は興味深い入門になる．ジェロベンコの本 [111] の附録 III は役に立つ．

剛体の運動方程式をリー群とリー代数の言葉で解釈することに関しては，本 [2] と [42] を参照のこと．形式群の理論の最も完全な概説は本 [57] である．

圏論との関係で例として与えられた位相空間のより詳細な考察が，本 [36] と [101]

にある．

複体のホモロジーとコホモロジーについては [61] を参照のこと．ド・ラム・コホモロジーとド・ラムの定理の証明は [92] に含まれているが，ド・ラムの定理は層の理論 [62] を使って証明するのが一番簡単である．

層の理論の基本的な例はリーマン–ロッホの定理であり，これは本 [62] に説明がある．

位相的 K 理論の基本的な例は指数定理である．ヒルツェブルフの概説 [63] は美しい入門になっており，[88] には証明が完全に述べられている．

代数的 K 理論では，群 K_2 と体のブラウワー群との関係に関する定理は A.C. メルクーリョフと A.A. ススリンによる（[100] を参照）．有限体に対する群 K_n の位数の計算に関する結果はクィレン [91] による．整数環に対する群 K_n の位数に関する予想と結果に関してはスーレ [97] を参照のこと．

代数学の発展の歴史と，数学全体と代数学との関係についての印象を得るためには，クラインの「講義」[73] は貴重な原典である．多くの興味ある観察が，ブルバキの本の歴史覚え書きにある．特殊な問題の歴史を述べたものだが，チャンドラーとマグヌス [24] は興味深い研究である．

参考文献

[訳者より] ロシア語原書では，文献は，ロシア語で書かれたものが最初に集められ，その後その他の言語で書かれた文献が置かれ，それぞれの中では著者のアルファベット順に並べられている．英語版はロシア語のものをすべて英訳し，すべてを著者のアルファベット順に並べ直してある．日本の読者がロシア語字母に慣れていないことを考慮して，文献を並べる順序は英語版に従うことにした．

追加文献については，最初が英語版によるもので，その後ロシア語第 2 版での追加を置き，最後に，日本の読者の便宜のために，著者の快諾も得て，若干の文献を訳者が追加した．それぞれの中では，英語にした上でのアルファベット順である．

なお，英語版には，Zentralblatt für Mathematik という数学文献に関する評論雑誌における，当該論文または書籍の短評が掲載されている巻号が付してあるが，本書の多くの読者にとってあまり意味があるように思えないのと，煩雑なことから省略した．著者のコメントと本文を読めば十分で，それ以上の情報を得たければ，引用された文献を直接読んだほうがよいと思われる．

[1] 『植物の一生』(Жизнь растений), Москва : ⟨⟨Просвещение⟩⟩, 1981, 5, No 1, 430pp.

[2] Arnol'd, V.I. (アーノルド, В.И.Арнольд) : 『古典力学の数学的方法』(Математические методы классической механики), Наука, Москва 1974, 431pp. 英訳は Grad. Texts Math. 60, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1978[1].

[3] Artin, E. (アルティン) : Geometric algebra, Interscience, New York 1957.

[4] Atiyah, M.F. (アティヤ) : *K*-theory, Benjamin, New York Amsterdam 1967.

[5] Atiyah, M.F., Macdonald, I.G. (——, マクドナルド) : Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969.

[6] Atiyah, M.F. and others: Representation theory of Lie groups, Lond. Math. Soc. Lect. Notes *34*, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York 1979.

[7] Baer, R. (ベーア) : Linear algebra and projective geometry, Pure Appl. Math. Vol. II, Academic Press, New York 1952.

1 [訳註] 日本語訳は,『古典力学の数学的方法』(安藤韶一，蟹江幸博，丹羽敏雄訳，岩波書店，1980)．

[8] Barwise, J.（バーワイズ） and others: Handbook of mathematical logic, Stud. Logic Found. Math. *90*, North-Holland, Amsterdam 1978.

[9] Besse, A.（ベッセ）編: Géométrie riemannienne en dimension 4, Séminaire Arthur Besse 1978/1979, CEDIC, Paris 1981.

[10] Birkhoff, G.（バーコフ）: Lattice theory, Amer. Math. Soc., New York 1940.

[11] Bogolyubov, N.N.（ボゴリューボフ, Н.Н.Боголюбов）: 「素粒子の対称性の理論」(Теория симметрии элементарных частиц), 『高エネルギー物理と素粒子論』(《Физика высоких энергий и теория элементарных частиц》), Киев, Наукова думка 1967, pp.5–112.

[12] Borel, A.（ボレル）: Linear algebraic groups, Benjamin, New York Amsterdam 1969.

[13] Borel, A.: Arithmetic properties of linear algebraic groups, in Proc. Int. Congr. Math., Stockholm, 1962, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm 1963, 10–22.

[14] Borel, A., Serre, J.-P.（——, セール）: Le théorème de Riemann-Roch, *86*, Bull. Soc. Math. Fr.(1959), p.97–136.

[15] Borevich, Z.I., Shafarevich, I.R.（ボレヴィッチ, シャファレヴィッチ, З.И.Боревич, И.Р.Шафаревич）: 『整数論』(Теория Чисел), Наука, Москва 1964, 566pp. 英訳は Academic Press, New York London 1966[2].

[16] Bourbaki, N.（ブルバキ）: Éléments de mathématiques, Algèbre, Chap. 1–3, Hermann, Paris, 1942–1948 I: 1942, III: 1948[3].

[17] Bourbaki, N.: Éléments de mathématiques, Algèbre, Chap. 9, Hermann, Paris 1959[4].

[18] Bourbaki, N.: Éléments de mathématiques, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, Hermann, Paris 1968[5].

[19] Bröcker, Th.（ブレッカー）: Differentiable germs and catastrophes, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York 1975.

[20] Brown, K.S.（ブラウン）: Cohomology of groups, Grad. Texts Math. 87, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1982.

[21] Burnside, W.（バーンサイド）: Theory of groups of finite order, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1897; Reprint: Dover, New York 1955[6].

---

2 ［訳註］日本語訳は,『整数論 上・下』(佐々木義雄訳, 数学叢書 14, 19, 吉岡書店, 上 1971, 下 1972).

3 ［訳註］日本語訳は,『数学原論：代数 1, 2, 3』(銀林浩他訳, 東京図書, 1968, 1970, 1970).

4 ［訳註］日本語訳は,『数学原論：代数 7』(田坂隆士他訳, 東京図書, 1970).

5 ［訳註］日本語訳は,『数学原論：リー群とリー環 3』(杉浦光夫訳, 東京図書, 1970).

6 ［訳註］日本語訳は,『有限群論』(伊藤昇, 吉岡昭子訳, 現代数学の系譜 9, 共立出版, 1970).

[22] Cartan, H., Eilenberg, S.（カルタン，アイレンベルグ）：Homological algebra, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1956.

[23] Cassels, J.W.S., Fröhlich, A.（カッセルズ，フレーリッヒ）編: Algebraic number theory, Academic Press, London 1967.

[24] Chandler, B., Magnus, W.（チャンドラー，マグヌス）：The history of combinatorial group theory, Stud. Hist. Math. Phys. Sci. *9*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1982.

[25] Chevalley, C.（シュヴァレー）：Theory of Lie groups, Princeton Mathematical Series 8, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1946.

[26] Chevalley, C.: Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Am. Math. Soc., New York 1951.

[27] Chevalley, C.: Classification des groupes de Lie algébriques, Séminaire C. Chevalley 1956–58, Secrétariat mathématique, Paris 1958.

[28] Chevalley, C.: La théorie des groupes algébriques, Proc. Int. Congr. Math., Edinburgh 1958, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York 1960, 53–68.

[29] Clifford, W.K.（クリフォード）: Mathematical papers, Macmillan, London 1882.

[30] Courant, R., Hilbert, D.（クーラント，ヒルベルト）：Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Springer-Verlag, Berlin 1931. 英訳は Methods of mathematical physics, Vol. I, Interscience, New York 1953[7].

[31] Dedekind, R., Weber, H.（デデキント，ヴェーバー）：Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, *92*, Crelle J. Reine Angew. Math. (1882), 181–291.

[32] Delone, B., Padurov, N., Aleksandrov, A.（デローネ，パドゥロフ，アレクサンドロフ，Б.Делоне，Н.Падуров，А.Александров）：『結晶の構造解析とレントゲン線を用いた繰り返しの基本平行 6 面体の決定』(Математические основы структурного анализа кристаллов и определение основного параллелепипеда повторяемости при помоши рентгеновских лучей), ОНТИ, ГТТИ, Москва-Ленинград 1934, 328pp.

[33] Deuring, M.（ドイリング）：Algebren, Springer-Verlag, Berlin 1935.

[34] Dieudonné, J.A., Carrell, J.B.（デュドネ，キャレル）：Invariant theory, old and new, Academic Press, New York London 1971.

---

7 ［訳註］日本語訳は，「数理物理学の方法 全 4 巻」（齋藤利弥監訳，丸山滋弥他訳，東京図書，1959–62）．

[35] Dirac, P.A.M.（ディラック）: The principles of quantum mechanics, Oxford Univ. Press, Oxford 1930[8].

[36] Dold, A.（ドルド）: Lectures on algebraic topology, Grundlehren Math. Wiss. 200, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1980.

[37] Dyson, F.J.（ダイソン）: Mathematics in the physical sciences, *211*, Scientific American (1964), 129–146.

[38] Eilenberg, S., MacLane, S.（アイレンベルグ, マクレーン）: Natural isomorphisms in group theory, *28*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 1942, 537–543.

[39] Eilenberg, S. MacLane, S.: General theory of natural equivalence, *58*, Trans. Am. Math. Soc. (1945), 231–294 .

[40] Fëdorov, E.S.（フョードロフ, Е.С.Фёдоров）:「平面上の対称性」(Симметрия на плоскости), *28*(2)『帝国聖ペテルスブルグ鉱物学会紀要』(Записки императорского Санкт-Петербургского минералогического общества)(1891), 345–390 .

[41] Feynman, R.P.（ファインマン）: The character of physical laws, Messenger Lectures, Cornell 1964, Cox and Wyman (BBC publications), London 1965[9].

[42] Fomenko, A.T.（フォメンコ, А.Т.Фоменко）:『微分幾何とトポロジー』附録 (Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы), МГУ（モスクワ大学）, Москва 1983, 216pp.[10]

[43] Freudenthal, H.（フロイデンタール）: Octaven, Ausnahmegruppen und Octavengeometrien, Math. Inst. Rijksuniversitet Utrecht 1951.

[44] Frobenius, G.（フロベニウス）: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 1–3, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1968.

[45] Galois, E.（ガロア）: Œuvres mathématiques d'Évariste Galois, Gauthier-Villars, Paris 1951[11].

[46] Gauss, C.F.（ガウス）: Disquisitiones arithmeticae, Werke, Bd. 1, Springer-Verlag, Berlin 1870. 英訳は Yale, New Haven, Conn. London 1966[12].

[47] Gel'fand, I.M., Raikov, D.A., Shilov, G.E.（ゲリファント, ライコフ, シーロフ, И.М.Гельфанд, Д.А.Райков, Г.Е.Шилов）:『可換ノルム

8 ［訳註］日本語訳は,『量子力學』(朝永振一郎, 玉木英彦, 木庭二郎, 大塚益比古訳, 岩波書店, 1954).

9 ［訳註］日本語訳は,『物理法則はいかにして発見されたか』(江沢洋訳, ダイヤモンド社, 1968).

10 ［訳註］日本語訳は,『微分幾何学とトポロジー』(三村護訳, 共立出版, 1996).

11 ［訳註］日本語訳は,『アーベル・ガロア 群と代数方程式』(守屋美賀雄訳, 現代数学の系譜 11 共立出版, 1975) の中にある.

12 ［訳註］日本語訳は,『ガウス整数論』(高瀬正仁訳, 数学史叢書, 朝倉書店, 1995).

環』(Коммутативные нормированные кольца), Физматгиз, Москва 1960, 316pp. 英訳は Chelsea, New York 1964.

[48] Goppa, V.D.（ゴッパ, В.Д.Гоппа）：「符号と情報」(Коды и информатсия), *39*, No. 1, Усп. Мат. Наук (1984), 77–120. 英訳は *39*, No. 1, Russ. Math. Surv.(1984), p.87–141.

[49] Gorenstein, D.（ゴーレンシュタイン）：Finite simple groups, An introduction to their classification, Univ. Series. in Math., Plenum Press New York, London 1982.

[50] Goto, M., Grosshans, F.D.（後藤守邦, グロスハンス）：Semisimple Lie algebras, Lect. Notes. Pure Appl. Math. 38, Marcel Dekker, New York Basel 1978.

[51] Grothendieck, A.（グロタンディエク）：Sur quelques points d'algèbre cohomologique, *9*, 2-3, Tôhoku Math. J. (1957), 119–221.

[52] Grothendieck, A.: The cohomology theory of abstract algebraic varieties, Proc. Int. Congr. Math., Edinburgh 1958, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York 1960, 103–118.

[53] Grothendieck, A., Dieudonné, J.（——, デュドネ）：Éléments de géométrie algébrique, III, Étude cohomologique des faisceaux cohérents, *11*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (1961), 1–167.

[54] Hadamard, J.（アダマール）：Leçons de géométrie élémentaire, II, Géométrie dans l'espace, Armand Colin, Paris 1908.

[55] Hadamard, J.:『保形関数論における非ユークリッド幾何学』(Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций), Гос. Издат. Техн.-Теор. Лит., Москва- Ленинград 1951, 133pp.[13]

[56] Hamermesh, M.（ハマーメシュ）：Group theory and its application to physical problems, Addison-Wesley, Reading, Mass. London 1964.

[57] Hazewinkel, M.（ヘイズウィンクル）：Formal groups and applications, Pure Appl. Math. 78, Academic Press, New York London 1978.

[58] Hazewinkel, M., Hesselink, W., Siersma, D., Veldkamp, F.D.（——, ヘッセリンク, シエルスマ, フェルドカンプ）：The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the A-D-E problem), *25*, Nieuw Arch. Wisk. III. Ser. (1977), 257–307.

[13] [訳註] ロバチェフスキー全集への寄稿として1920年頃に書かれ, 後になって A.V. ヴァシーリェフ (A.B.Васильев, 1853.7.2–1929.10.9) によってロシア語に翻訳されて出版されたものである. 残念ながら, フランス語の原稿は失われてしまったが, Abe Shenitzer による英訳 Non-Euclidean geometry in the theory of automorphic functions が, アメリカ数学会とロンドン数学会の History of Mathematics, 17 として 1999 年に出版されている.

[59] Hilbert, D.（ヒルベルト）：Grundlagen der Geometrie, Teubner, Leipzig Berlin 1930[14].

[60] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.（——, コーン-フォッセン）：Anschauliche Geometrie, Springer-Verlag, Berlin 1932. 英訳は Geometry and the imagination, Chelsea, New York 1952[15].

[61] Hilton, P.J., Stammbach, U.（ヒルトン, スタンバック）：A course in homological algebra, Grad. Texts Math. 4, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1971.

[62] Hirzebruch, F.（ヒルツェブルフ）：Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1956. 英訳は Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1966[16].

[63] Hirzebruch, F.：Elliptische Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten, *33*, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen(1965), 563–608.

[64] Hochschild, G.（ホッホシルト）：The structure of Lie groups, Holden-Day, San Francisco London Amsterdam 1965[17].

[65] Hoffman, K.（ホフマン）：Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1962.

[66] Humphreys, J.E.（ハンフリーズ）：Linear algebraic groups, Grad. Texts Math. 21, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1975.

[67] Huppert, B.（フッペルト）：Endliche Gruppen, Bd. I, Grundlehren Math. Wiss. 134, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1967.

[68] Huppert, B., Blackburn, N.（——, ブラックバーン）：Finite groups, Vol. II–III, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1982. II: Grundlehren Math. Wiss. 242. III: Grundlehren Math. Wiss. 243.

[69] Ince, E.L.（インス）：Ordinary differential equations, Longmans-Green, London 1927.

[70] Jordan, C.（ジョルダン）：Traité des substitutions des équations algébriques, Gauthier-Villars, Paris 1870.

[71] Kaplansky, I.（カプランスキー）：An introduction to differential algebra, Hermann, Paris 1957.

---

14 ［訳註］日本語訳は,『幾何学の基礎, エルランゲン・プログラム』(寺阪英孝, 大西正男訳・解説, 現代数学の系譜 7, 共立出版, 1970) の中にある.

15 ［訳註］日本語訳は,『直観幾何学』(芹沢正三訳, みすず書房, 1966).

16 ［訳註］日本語訳は,『代数幾何における位相的方法』(竹内勝訳, 数学叢書 12, 吉岡書店, 1970).

17 ［訳註］日本語訳は,『リー群の構造』(橋本浩治訳, 吉岡書店, 1972).

[72] Kirillov, A.A.（キリロフ, A.A.Кириллов）: 『表現論の基礎知識』(Элементы теории представлений), Наука, Москва 1972. 英訳は Grundlehren Math. Wiss. 220, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1976.

[73] Klein, F.（クライン）: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Grundlehren Math. Wiss. 24, Springer-Verlag, Berin 1926[18].

[74] Klemm, M.（クレム）: Symmetrien von Ornamenten und Kristallen, Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1982.

[75] Kostrikin, A.I., Manin, Yu.I.（コストリキン, マニン, А.И. Кострикин, Ю.И. Манин）: 『線形代数と幾何』(Линейная алгебра и геометрия), МГУ, Москва 1980, 318pp. 英訳は Gordon and Breach, New York London 1989.

[76] Kronecker, L.（クロネッカー）: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, *92*, J. Reine Angew. Math. (1882), 1–123.

[77] Kurosh, A.G.（クローシュ, А.Г.Курош）: 『群論』(Теория групп), ГИТТЛ, Москва-Ленинград 1944, 372pp. 英訳は Vol. I, II, Chelsea, New York 1955, 1956[19] .

[78] Lawson, H.B. Jr.（ローソン）: Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose, Exp. *624*, Séminaire Bourbaki, *121/122*, Astérisque (1985), 197–211.

[79] Lie, S., Engel, F.（リー, エンゲル）: Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I–III, Teubner, Leipzig, I 1883, II 1888, III 1893.

[80] Mal'tsev, A.I.（マリツェフ, А.И.Мальцев）: 「群とその他の代数系」(Группы и другие алгебраические системы), 『数学, その内容, 方法, 意義』(Математика, её цодержание, методы и значение), 第 3 巻, ソ連科学アカデミー (АН СССР), Москва 1956, 248–331.

[81] Manin, Yu.I.（マニン, Ю.И.Манин）: A course in mathematical logic, Grad. Texts Math. 53, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.

[82] Manin, Yu.I., Vlehduts, S.G.（——, ヴレドゥッツ, С.Г. Влэдуц）:「線形符号とモデュラー曲線」(Линейные коды и модулярные кривые), *25*, 『現代の数学の問題. 最新の業績』(Современные проблемы математики.

---

18 ［訳註］日本語訳は,『クライン：19 世紀の数学』(彌永昌吉監修, 足立恒雄, 浪川幸彦監訳, 石井省吾, 渡辺弘訳, 共立出版, 1995).

19 ［訳註］日本語訳は, ア・ゲ・クローシュ『群論 上・下』(本田欣哉校閲, 吉崎敬夫訳, 数学選書, 東京図書, 上 1960, 下 1961).

Новейшие достижения), Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР(1984), 209–256. 英訳は *30*, J. Sov. Math. (1985), 2611–2643.

[83] Manin, Yu.I.: 『代数幾何学講義　第 1 部. アフィン・スキーム』(Лекции по алгебраической геометрии. Части 1. Аффинные шемы), МГУ, Москва 1970, 133pp.

[84] Michel, L.（ミシェル）: Symmetry defects and broken symmetry configurations, hidden symmetry, *52*, Rev. Mod. Phys. (1980), 617–652.

[85] Milnor, J.（ミルナー）: Introduction to algebraic K-theory, Ann. Math. Stud., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1971.

[86] Mumford, D.（マンフォード）: An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to Toda lattice equations, Korteweg-de Vries equations and related non-linear equations, in Proc. int. symp. on algebraic geometry, Kyoto 1977, Kinokuniya, Tokyo 1977, 115–153.

[87] von Neumann, J.（フォン・ノイマン）: Continuous geometry, Princeton Univ. Press, Princeton New Jersey 1960.

[88] Palais, R.S.（パレ）: Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Ann. Math. Stud. *57*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1965.

[89] Pedersen, J.（ペデルセン）: Geometry: The unity of theory and practice, *5*, No. 4, Math. Intell.(1983), 37–49. B. Grünbaum（グリュンバウム）, The Emperor's new clothes: full regalia, G string, or nothing? *6*, No. 4, Math. Intell.(1984), 47–53. P. Hilton and J. Pedersen（ヒルトン, ペデルセン）, Comments on Grünbaum's article, *6*, No. 4, Math. Intelli.(1984), 54–56.

[90] Pontryagin, L.S.（ポントリャーギン, Л.С.Понтрягин）: 『連続群』(Непрерывные группы), Редак. техн.-теор. лит., Москва–Ленинград 1938, 316pp. 英訳は Oxford Univ. Press, London Milford Haven Conn[20].

[91] Quillen, D.（クィレン）: On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field, (2) *96*, Ann. Math.(1972), p.552–586 .

[92] de Rham, G.（ド・ラム）: Variétés différentiables, Formes, courants, formes harmoniques, Hermann, Paris 1955[21].

[93] Seifert, H., Threlfall, W.（ザイフェルト, トレルファール）: Lehrbuch der Topologie, Teubner, Leipzig Berlin 1934.

[94] *Séminaire Sophus Lie*, Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie, Paris 1955 .

20 ［訳註］日本語訳は,『連続群論 上・下』(柴岡泰光, 杉浦光夫, 宮崎功訳, 岩波書店, 上 1957, 下 1958）.

21 ［訳註］日本語訳は,『微分多様体：微分形式・カレント・調和形式』(高橋恒郎訳, 東京図書, 1974）.

[95] Serre, J.-P.（セール）: Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris 1967. 英訳は Grad. Texts Math. 42, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977[22].

[96] Shafarevich, I.R.（シャファレヴィッチ, И.Р.Шафаревич）:『代数幾何の基礎』(Основны алгебраической геометрии), Наука, Москва 1972, 565pp. 英訳は Grundlehren Math. Wiss. 213, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1974.

[97] Soulé, K.（スーレ）: K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale, *55*, Invent. Math.(1979), 251–295 .

[98] Speiser, A.（シュパイザー）: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Springer-Verlag, Berlin 1937.

[99] Springer, T.A.（シュプリンガー）: Linear algebraic groups, Prog. Math. 9, Birkhäuser, Boston 1981.

[100] Suslin, A.A.（ススリン, A.A.Суслин）:「代数的 K 理論とノルム留数準同型」(Алгебраическая K-теория и гомоморфизм норменного вычета), *25*,『現代の数学の問題. 最新の業績』(Современные проблемы математики. Новейшие достижения), Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР(1984), 115–207. 英訳は *30*, J. Sov. Math.(1985), 2556–2611.

[101] Switzer, R.M.（シュヴィツァー）: Algebraic topology — homotopy and homology, Grundlehren Math. Wiss. 212, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1975.

[102] Tennison, B.R.（テニソン）: Sheaf theory, Lond. Math. Soc. Lect. Notes 20, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York 1975.

[103] Tits, J.（ティッツ）: Groupes simples et géométries associées, in Proc. Int. Congr. Math., Stockholm 1962, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm 1963, 197–221.

[104] van der Waerden, B.L.（ファン・デル・ヴェルデン）: Moderne Algebra, Bd. 1, 2, Springer-Verlag, Berlin 1930, 1931. 英訳は Algebra, Vol. I, II, Ungar, New York 1970[23].

[105] Weber, H.（ヴェーバー）: Lehrbuch der Algebra, Bd. 1, 2, Vieweg, Braunschweig 1898, 1899[24].

[106] Weil, A.（ヴェイユ）: Basic number theory, Grundlehren Math. Wiss. 144, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1967.

---

22 [訳註] 日本語訳は,『有限群の線型表現』(岩堀長慶, 横沼健雄訳, 岩波書店, 1974).

23 [訳註] 日本語訳は『現代代数学 1, 2, 3』(銀林浩訳, 数学選書, 東京図書, 1959–1960).

24 [訳註] これは第 2 版で, 初版は 1894, 1896 に出版されている.

[107] Weyl, H.（ワイル）： Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel, Leipzig 1928. 英訳は Princeton 1930[25].

[108] Weyl, H.: Mathematische Analyse des Raumproblems, Springer-Verlag, Berlin 1923. 再版は Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1977.

[109] Weyl, H.: The classical groups, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1939.

[110] Weyl, H.: Symmetry, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1952[26].

[111] Zhelobenko, D.P.（ジェロベンコ，Д.П.Желобенко）：『コンパクト・リー群とその表現』(Компактные группы Ли и их представления), Наука, Москва 1970, 664pp.. 英訳は Am. Math. Soc., Providence 1973.

英語版での追加：

[112] Cohn, P.M.（コーン）： Algebra, vol. 1, 2, J. Wiley, London New York Sidney 1974, 1977. 2nd ed.: J. Wiley 1982.

[113] Curtis, C.W., Reiner, I.（カーティス，ライナー）：Methods of representation theory, vol. I, II, Pure and Applied Mathematics, J. Wiley, London New York Sidney 1981, 1987.

[114] Jacobson, N.（ジャコブソン）：Lectures in abstract algebra, vol. I, II, III, Van Nostrand, Princeton, New Jersey 1951, 1953, 1964.

[115] 松村英之『可換環論』，共立出版 (1980). 英訳は Matsumura, H.: Commutative ring theory, C.U.P, Cambridge New York Melbourne 1986.

ロシア語原著第 **2** 版での追加：

[116] Markov, A.A.（マルコフ，A.A.Марков）： 「アルゴリズム論」(Теория алгорифмов), XXXVIII,『スチェクロフ数学研究所紀要』(Труды Математического Института им. В.А. Стеклова) (1951), 176–190.

[117] Trofimov, V.V, Fomenko, A.T.（トロフィーモフ, フォメンコ, В.В.Трофимов, А.Т.Фоменко）：『可積分ハミルトン微分方程式の代数と幾何』(Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений), Издатеьство《Факториал》, 1995.

日本語版での追加：

[118] Bourbaki, N.（ブルバキ）：Éléments de mathématiques, Algèbre, Chap. 6–7, Hermann, Paris 1964. 日本語訳は，ブルバキ『数学原論：代数 5』（草場敏夫訳，東京図書，1969).

[25] ［訳註］日本語訳は，「群論と量子力学」（山内恭彦訳，裳華房，1932）．1977 年に現代工学社から復刻版が出ている．

[26] ［訳註］日本語訳は，「シンメトリー」（遠山啓訳，紀伊國屋書店，1957）．

[119] Cohn, P. M.（コーン）：On the Structure of $\mathbf{GL}_2$ of a Ring, *30*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.(1966), 1–33.

[120] 堀田良之 『代数入門 群と加群』, 裳華房 (1987).

[121] Hungerford, Thomas W.（ハンガーフォード）: Algebra, Grad. Texts Math. 73, Spriner-Verlag Berlin Heidelberg New York 1974.

[122] Khinchin, A.Ya.（ヒンチン，A.Я.Хинчин）：『数論の 3 つの真珠』(Три Жемчужины Теории Чисел), Москва 1945, 1946, 1979. 日本語訳の『数論の 3 つの真珠』（蟹江幸博訳，日本評論社, 2000 年）は第 3 版 (1979) からのもの.

[123] 永田雅宜 『可換体論（新版）』, 数学選書 6, 裳華房 (1967, 1985).

[124] 永田雅宜 『可換環論』, 紀伊國屋数学叢書 1, 紀伊國屋書店 (1974).

[125] 武隈良一『2 次体の整数論』, 数学選書, 槇書店 (1966).

[126] Toth, G.（トス）: Glimpses of Algebra and Geometry, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg 1998. 日本語訳は,『数学名所案内 代数と幾何のきらめき 上・下』(蟹江幸博訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，上 1999, 下 2000）.

[127] 山崎圭次郎『環と加群』, 岩波基礎数学選書，岩波書店 (1990).

[128] 横田一郎『群と表現』, 基礎数学選書 10, 裳華房 (1973).

人名索引

[訳者より] 本文の人名に関し，原著の索引ではその記載ページを示すにとどめているが，日本語版では各人物について若干の注釈を訳者が加えることにした．訳者は，数学史の専門家ではないし，各人物 (特に現役の人物) については，履歴・現職・専門分野など確認できないケースも少なからずあった．各注釈は，あくまでも本書の読者の便宜のために，訳者の判断で書いたものであるので，人物の記載に疎密が生じていることをお断りしておきたい．

生没年と生没地だけは記載したいものと調べてみたが，参考にした文献でもはっきりしていなかったり，矛盾することもある．その場合，明らかな誤りが認められる場合を除いて，記載が細かいものを掲載した．原則としては，『岩波数学辞典第 3 版』，大竹出版『世界数学者人名辞典』(A.L. ボロディーン，A.S. ブガーイ著，千田健吾，山崎昇訳)，イギリスのセント・アンドリュース大学のホームページ MacTutor(`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history`) などを参照して，わかる限り記載しておいた．

また，各種受賞歴については，ノーベル (物理学) 賞，フィールズ賞についてのみ記載した．ここでは各人物に関する注釈は簡潔を旨としたが，訳者のホームページ (奥付参照) では，さらに詳しく雑多な話題を含んだバージョンを掲載している．各人物についてさらに知りたいと思われた読者は，ぜひこのホームページをご覧頂きたい．各人物の記載ページは各項目の末尾に示した．

クィレン Daniel Grey Quillen 1940.6.27-. アメリカ，ニュージャージー，オレンジの生まれ．MIT 教授．高次の代数的 K 理論で，フィールズ賞 (1978)．代数トポロジー．単体的対象上のホモロジー，ホモトピー論のアダムス予想．339

クライン Felix Christian Klein 1849.4.25-1925.6.22. プロシャ，デュッセルドルフ (現在ドイツ領) に生まれ，ドイツ，ゲッティンゲンに死す．ゲッティンゲン大学教授．有名なエルランゲン・プログラムは，エルランゲン大学教授就任講演．楕円関数論．リーマン面の定義．クラインの壷．146, 182, 205, 209, 333, 334, 336, 339

クリフォード William Kingdom Clifford 1845.5.4-1879.3.3. イギリス，デヴォン，エクスターに生まれ，ポルトガル，マデイラ島に死す．数学・哲学者．ロンドン大学数学力学教授 (1871-79)．四元数の導入，楕円空間の平行線，クリフォード代数．童話集も出版している．96, 200, 337

グリーン George Green 1793-1841.3.31. イギリス，ノッティンガム，スネイントンに生まれ，同地に死す．数学を独習．31 才で出版した『電磁気理論』にはベクトル解析が展開．40 才のときケンブリッジ大学に入学．在学中に引力，流体の波，音，光，光の伝播に関する論文を書く．301

クルル Wolfgang Krull 1899.8.26-1971.4.12. ドイツ，バーデンバーデンに生まれ，ボンに死す．ゲッティンゲン大学で F. クラインのもとで学び，E. ネーターに強い影響を受ける．エルランゲン大学，ボン大学で教鞭．代数学，特に環論，体の拡大理論．211

クレブシュ Rudolf Friedrich Alfred Clebsch 1833.1.19-1872.11.7. ドイツ，ケーニヒスベルク (現在，ロシア，カリーニングラード) に生まれ，ドイツ，ゲッティンゲンに死す．数学雑誌 Mathematische Annalen の創始者の 1 人．不変式論，射影幾何学，クレブシュ–ゴルダンの係数．239

クローシュ A.G. Kurosh (Александр Геннадиевич Курош) 1908.1.19-1971.5.18. ロシア，ヤルツェヴォ(スモレンスクの近く) に生まれ，ロシア，モスクワに死す．E. ネーターの講演を聞いたアレキサンドロフの講義を聞き，代数学への興味が形成された．モスクワ大学教授 (1937)．『群論』,『代数学教程』は日本語にも訳され，抽象代数学の普及に貢献．334

グロタンディエク Alexander Grothendieck 1928.3.28-. ドイツ，ベルリンの生まれの，国際連合に認定された世界市民．ブルバキに参加．関数解析，代数トポロジー，代数幾何に新しい境地を作り出す．スキーム，エタール・コホモロジーなどを考案．335, 336

クロネッカー Leopold Kronecker 1823.12.7-1891.12.29. プロシャ，リーグニッツ (現在ポーランド領) に生まれ，ドイツ，ベルリンに死す．ベルリン大学教授．方程式論，代数的数論，楕円関数論.「神は整数を作り給い，その他は人の技である.」333, 336

ケイリー Arthur Cayley 1821.8.16-1895.1.26. イギリス，サリー，リッチモンドに生まれ，ケンブリッジシャー，ケンブリッジに死す．ケンブリッジ大学サドラー教授職 (1863–没)．900 以上の数学論文．代数幾何の基礎，不変式論，射影幾何，非ユークリッド幾何．ケイリー代数．139, 146, 182, 205, 276

ケーベ Paul Koebe 1882.2.15-1945.8.6. ドイツ，ルッケンヴァルトに生まれ，ライプツィヒに死す．ライプツィヒ大学教授 (1926)．複素関数論，特に等角写像や保形関数の理論．リーマン面の一意化定理の証明．181

コーシー Augustin Louis Cauchy 1789.8.21-1857.5.23. パリに生まれ，(パリ近郊) ソーに死す．エコール・ポリテクニーク教授．『解析学教程』(1821) など，以降の典型となる多くの教科書を出版．業績は幅広く，解析学，特に収束級数論，複素関数論，微分方程式論の基礎付けなど．76, 98

コストリキン A.I. Kostrikin (Алексей Иванович Кострикин) 1929.2.12-. ソ連，ボルゴグラード州，ボリショイ・モルツァの生まれ．モスクワ大学教授 (1976)．代数幾何，リー代数，有限群．単純指標に対する制限バーンサイド問題の解決 (1959)．347

ゴルダン Paul Albert Gordan 1837.4.27-1912.12.21. ドイツ，ブレスラウ (現在ポーランド，ブロツラフ) に生まれ，ドイツ，エルランゲンに死す．エルランゲン大学教授 (1867)．代数学，不変式論．双 1 次形式の不変式の有限性定理，クレブシュ–ゴルダン係数．239

ゴーレンシュタイン Daniel Gorenstein 1923.1.1-1992.8.26. アメリカ，マサチューセッツ，ボストンに生まれ，アメリカに死す．ゴーレンシュタイン環の導入を含む学位論文 (1950)．ラトガース大学で教鞭 (1969–没)．1957 年に有限群の研究に戻り，有限単純群の分類に大きな貢献．335

事項索引

■た行

■な行

■は行

【著者】
I.R. シャファレヴィッチ（Igor Rostislavovich Shafarevich）
117 966, Moscow, Ul. Gubkina, 8,
Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences,
Russia.

【訳者】
蟹江　幸博（かにえ　ゆきひろ）
'76 年 3 月，京都大学大学院理学研究科博士課程修了．
三重大学教育学部教授．理学博士．
専門：トポロジー，表現論．
訳書に，V.I. アーノルド『数理解析のパイオニアたち』，
E. ハイラー，G. ヴァンナー『解析教程 上・下』，
G. トス『数学名所案内 上・下』，J.W. ミルナー『微分トポロジー講義』，
M. アイグナー，G.M. ツィーグラー『天書の証明』，H. ワイル『古典群』，
I. ジェイムズ『数学者列伝 I』（以上，シュプリンガー・ジャパン）などがある．
http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/

代数学とは何か

平成 24 年 2 月 20 日　発　行

訳　者　蟹　江　幸　博

編　集　シュプリンガー・ジャパン株式会社

発行者　池　田　和　博

発行所　丸善出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町二丁目17番
編集：電話 (03)3512-3263／FAX (03)3512-3272
営業：電話 (03)3512-3256／FAX (03)3512-3270
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・平河工業社／製本・株式会社 松岳社

ISBN 978-4-621-06278-4　C3041　Printed in Japan

本書は，2001年 7 月にシュプリンガー・ジャパン株式会社より
出版された同名書籍を再出版したものです。